풀이

STEP III 2024, 문제 3

순수수학 • 단조함수와 도함수

> **STEP III 2024, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 도함수(derivative) 하나에 달려 있다. g를 미분(differentiate)하여 통분하면 분자가 x에 대한 **일차**(linear) 식으로 정리되므로, 그 부호를 쉽게 읽어 낼 수 있다. 소문항 (iii)과의 연결 고리는 g가 정확히 $\ln f$의 도함수라는 점이다. 따라서 (ii)의 그래프 개형으로 눈에 보이게 되는 g의 부호가 f가 증가하는지 감소하는지를 결정한다.

풀이

소문항 (i)

$x > 0$이므로 $\ln(1+\frac{1}{x}) = \ln(x+1) - \ln x$로 쓴다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)^2},$$

이고, 분모가 x^2+x인 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+c}{x^2+x} = \frac{(x^2+x)-(x+c)(2x+1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{-x^2-2cx-c}{x^2(x+1)^2}.$$

두 식을 빼면 x^2 항이 소거된다:

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{-x^2-x+x^2+2cx+c}{x^2(x+1)^2} = \frac{(2c-1)x+c}{x^2(x+1)^2}.$$

분모는 양수이므로 $\mathrm{g}'(x)$의 부호는 $N(x) = (2c-1)x + c$의 부호와 같다.

(a) $c \geq \frac{1}{2}$이면 $(2c-1)x \geq 0$이고 $c \geq \frac{1}{2} > 0$이므로, 모든 $x > 0$에 대해 $N(x) > 0$이다. 따라서 모든 $x > 0$에서 기울기(gradient)는 양수이다.

(b) $0 \le c < \frac{1}{2}$이면 $1-2c > 0$이고,

$$N(x) < 0 \iff (1-2c)x > c \iff x > \frac{c}{1-2c}.$$

따라서 기울기는 정확히 $x > \dfrac{c}{1-2c}$일 때 음수이다. ($c = 0$일 때는 모든 $x > 0$이 이에 해당한다.) $x_0 = \dfrac{c}{1-2c}$라 하자. $c > 0$이면 g는 $(0, x_0]$에서 증가하고 $[x_0, \infty)$에서 감소한다.

소문항 (ii)

x가 클 때의 거동도 알아야 한다. g의 두 항은 모두 0으로 가므로 $\mathrm{g}(x) \to 0$이지만, 그래프 개형에는 어느 쪽에서 다가가는지가 드러나야 한다. $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$에 $t = \frac{1}{x}$를 대입하고 $\dfrac{x+c}{x(x+1)} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x} + \cdots\right) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c-1}{x^2} + \cdots$를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{g}(x) = \frac{\frac{1}{2} - c}{x^2} + \cdots \quad \text{충분히 큰} x.$$

> **?** **생각해 보기** g가 증가하면서 0으로 간다면, 축의 어느 쪽에 있어야 하는가?

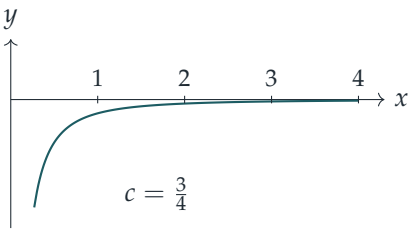
아래쪽에 있어야 한다. g가 순증가(strictly increasing)하면 임의의 x에 대해 모든 $y > x$에서 $\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(y)$이고, $y \to \infty$로 보내면 $\mathrm{g}(x) < 0$을 얻는다($\mathrm{g}(x) < \mathrm{g}(x+1) \le 0$이므로 등호가 없는 부등식이다). 같은 방식으로, 순감소하면서 0으로 가는 함수는 양수이다.

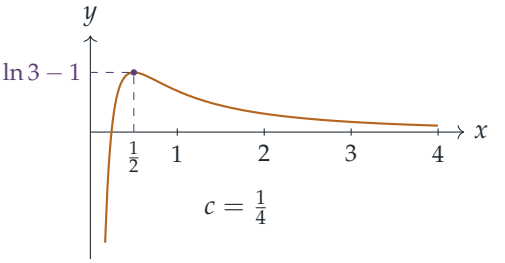
(a) $c = \frac{3}{4}$. (i)(a)에 의해 g는 전 구간에서 증가한다. ($x \to 0$일 때) $-\infty$에서 출발하여 0을 향해 올라가며 축 아래에 머문다. $-\frac{1}{4x^2}$처럼 다가가므로 축과 만나지 않고 극점(turning point)도 없다. 예를 들어 $\mathrm{g}(1) = \ln 2 - \frac{7}{8} \approx -0.18$이다.

(b) $c = \frac{1}{4}$. 여기서 $x_0 = \dfrac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$이다. 곡선은 $-\infty$에서 올라가 $x = \frac{1}{2}$에서 최댓값에 이르며, 그 값은 다음과 같다.

$$\mathrm{g}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{3/4}{3/4} = \ln 3 - 1 \approx 0.099 > 0.$$

그 뒤 위쪽에서 0을 향해 $\frac{1}{4x^2}$처럼 감소한다. $[\frac{1}{2}, \infty)$에서는 0으로 감소하므로 그 구간에서 양수이다. $(0, \frac{1}{2})$에서는 $-\infty$에서 양의 값까지 증가하므로 축과 정확히 한 번 만나며, 그 점은 $\frac{1}{4}$보다 조금 작다(수치로는 $x \approx 0.243$).





(두 그래프의 세로 눈금은 서로 다르다. 오른쪽 그래프는 작은 양의 볼록한 부분이 보이도록 세로로 늘려 그렸다. 두 그래프 모두 y축이 점근선이다.)

소문항 (iii)

$x > 0$에서 $\mathrm{f}(x) > 0$이므로 로그를 취할 수 있다:

$$\ln \mathrm{f}(x) = (x+c)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

곱의 미분법(product rule)으로 미분하고 (i)에서 구한 도함수를 이용하면

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + (x+c)\cdot\left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \mathrm{g}(x).$$

따라서 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)$이고, $\mathrm{f}(x) > 0$이므로 f'의 부호는 g의 부호와 같다. 또한 두 항이 모두 0으로 가므로, 모든 c에 대해 $x \to \infty$일 때 $\mathrm{g}(x) \to 0$임에 주목하자.

(a) $c \geq \frac{1}{2}$**.** (i)(a)에 의해 g는 $x > 0$에서 순증가하고 0으로 간다. (ii)의 상자 다음에 나온 논증에 의해 모든 $x > 0$에 대해 $\mathrm{g}(x) < 0$이다. 따라서 $\mathrm{f}'(x) < 0$이고, f는 감소한다.

(b) $0 < c < \frac{1}{2}$**.** (i)(b)에 의해 g는 $[x_0, \infty)$에서 순감소하고 0으로 가므로 그 구간에서 $\mathrm{g} > 0$이다. 특히 $\mathrm{g}(x_0) > 0$이다. $(0, x_0]$에서 g는 연속(continuous)이고 순증가하며, $x \to 0$일 때 $\mathrm{g}(x) \to -\infty$이다($c > 0$이므로 문제에서 주어진 사실이다). 그러므로 정확히 한 점 $x_1 \in (0, x_0)$에서 값 0을 가지며, $(0, x_1)$에서 $\mathrm{g} < 0$이고 (x_1, ∞)에서 $\mathrm{g} > 0$이다. 따라서 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$이고, 그 점에서 f'의 부호가 음에서 양으로 바뀐다. 그러므로 f는 x_1에서 극점(극소)을 가진다.

> ? **생각해 보기** 왜 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$만으로는 충분하지 않은가?

정류점(stationary point)이 반드시 극점인 것은 아니다(원점에서의 $y = x^3$을 생각해 보라). x_1을 극점으로 만드는 것은 f'의 부호 변화이며, 바로 그것을 g의 모양이 보장해 준다.

(c) $c = 0$**.** 이제 모든 $x > 0$에 대해 $\mathrm{g}'(x) = \dfrac{-x}{x^2(x+1)^2} < 0$이므로, g는 순감소하고 0으로 간다. 따라서 모든 $x > 0$에 대해 $\mathrm{g}(x) > 0$이므로 $\mathrm{f}'(x) > 0$이고, $\mathrm{f}(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$는 증가한다.

검산

- 한 점, 예를 들어 $x = 1$, $c = \frac{1}{4}$에서 g를 수치적으로 미분해 보자. 공식에서 $\mathrm{g}'(1) = \frac{-1/2+1/4}{4} = -\frac{1}{16}$을 얻으며, 이는 차분몫(difference quotient)과 일치한다.
- $c = \frac{1}{4}$: $\mathrm{g}(0.2) \approx -0.083$이고 $\mathrm{g}(0.3) \approx 0.056$이므로, 0.243 근처에서 축과 한 번만 만난다는 결과와 맞는다. $c = \frac{3}{4}$일 때는 $\mathrm{g}(3) \approx -0.025$로, 여전히 축 바로 아래에 있다.

- $c = \frac{1}{4}$인 (iii)(b)에서 f의 최솟값은 같은 $x \approx 0.243$에서 나타나며, $(0, \frac{1}{2})$에 속하는 여러 c 값에 대해 촘촘한 격자 위에서 f를 컴퓨터로 확인하면 극점이 정확히 하나 나온다.
- $c = 0$일 때 $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$는 증가하며 e로 가고, $c = 1$일 때 $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$은 감소하며 e로 간다. 이것이 e를 양쪽에서 조여 오는 익숙한 두 수열(sequence)이다.

흔한 실수

- "g가 증가한다"는 사실만으로 $g < 0$이라고 결론짓는 것. $x \to \infty$일 때의 극한(limit) $g \to 0$도 필요하다.
- (ii)(b)에서 곡선을 항상 음수인 것처럼 그리는 것. 최댓값 $\ln 3 - 1$은 작지만 양수이므로, 곡선은 축을 가로지른 뒤 위쪽에서 다시 축으로 내려와야 한다.
- 지수가 상수인 것처럼 $(1 + \frac{1}{x})^{x+c}$를 미분하는 것. 먼저 로그를 취하라.

STEP 너머

$(1 + \frac{1}{x})^x$는 증가하고 $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$은 감소하며 둘 다 e로 간다는 사실은, e를 정의하는 극한이 존재함을 증명하는 대학 1학년 과정의 고전적인 방법이다. 이는 단조수렴정리(monotone convergence theorem)의 한 예이다. 이 문제는 거동이 바뀌는 정확한 경계값 $c = \frac{1}{2}$를 찾아내며, 전개식 $g(x) \approx (\frac{1}{2} - c)/x^2$이 그 이유를 설명해 준다. 단조수열과 극한에 대해 더 알고 싶다면 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.