풀이

STEP III 2024, 문제 2

순수수학 • 부등식과 절댓값

> **STEP III 2024, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 제곱근 안의 식은 모두 항상 양수인 이차식이고, 각 부등식의 양변은 음이 아니므로 해집합을 바꾸지 않고 양변을 제곱할 수 있다. 제곱하면 각 문제는 이차식(또는 x^2 항이 소거될 때는 일차함수)의 부호에 관한 명제로 바뀐다. 기하적으로 보면 $y = \sqrt{4x^2 - 8x + 64}$는 쌍곡선(hyperbola)의 위쪽 절반이고, 문제에 나오는 직선들은 이 쌍곡선의 현과 점근선(asymptote)이다.

풀이

소문항 (i)

완전제곱식(completing the square)으로 고치면 $4x^2 - 8x + 64 = 4(x-1)^2 + 60 > 0$이므로 제곱근은 모든 x에서 정의된다. 각 부등식의 양변은 음이 아니고, $A, B \geq 0$이면 $A \leq B \iff A^2 \leq B^2$이다.

(a) 제곱하면

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq x^2 + 16x + 64 &\iff 3x^2 - 24x \leq 0 \\ &\iff 3x(x-8) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

(b) 제곱하면

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq 9x^2 - 48x + 64 &\iff 0 \leq 5x^2 - 40x \\ &\iff 5x(x-8) \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 8. \end{aligned}$$

두 경우 모두 $x = 0$(모든 변이 8)과 $x = 8$(모든 변이 16)에서 등호가 성립한다.

소문항 (ii)

(a) 제곱의 차(difference of two squares)를 이용하면

$$\left(\sqrt{4x^2-8x+64}+2(x-1)\right)\mathrm{f}(x) = (4x^2-8x+64)-4(x-1)^2 = 60.$$

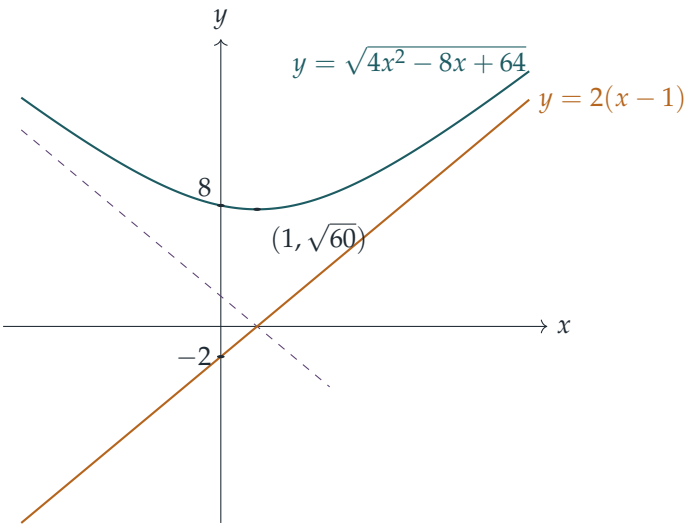
$x>1$이면 괄호 안이 양수이므로 나눌 수 있다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{60}{\sqrt{4x^2-8x+64}+2(x-1)}.$$

$x\to\infty$일 때 분모는 $2(x-1)$ 이상이고 $2(x-1)$은 무한대로 발산하므로, 요구한 대로 $\mathrm{f}(x)\to 0$이다.

(b) $y=\sqrt{4(x-1)^2+60}$이라 하자. 그러면 $y>0$이고 $y^2-4(x-1)^2=60$이므로, 이 곡선은 중심이 $(1,0)$인 쌍곡선의 위쪽 가지이다. 곡선은 $x=1$에 대하여 대칭이고, $x=1$에서 최솟값 $\sqrt{60}=2\sqrt{15}\approx 7.75$를 가지며, y축과 $(0,8)$에서 만난다.

$y>\sqrt{4(x-1)^2}=2|x-1|$이므로 곡선은 두 직선 $y=\pm 2(x-1)$보다 항상 엄격히 위에 있다. 소문항 (a)에 따르면 $x\to\infty$일 때 곡선은 $y=2(x-1)$에 가까워진다. $x=1$에 대한 대칭성에 의해 $x\to-\infty$일 때는 $y=-2(x-1)$에 가까워진다. 직선 $y=2(x-1)$은 기울기가 2이고 $(1,0)$과 $(0,-2)$를 지난다.



점선은 다른 점근선 $y=-2(x-1)$이다.

소문항 (iii)

이번에도 $4x^2-5x+4=4(x-\frac{5}{8})^2+\frac{39}{16}>0$이므로 제곱근은 항상 정의된다. (음이 아닌) 양변을 제곱하면 주어진 부등식은 다음과 동치이다.

$$(m^2-4)x^2+(2mc+5)x+(c^2-4)\geq 0. \qquad (*)$$

생각해 보기 $(*)$의 좌변이 정확히 $x \geq 3$일 때만 음이 아니려면 어떤 꼴의 식이어야 할까?

$m^2 - 4 > 0$이면 $x \to -\infty$일 때 좌변이 $+\infty$로 발산하므로, 아주 작은 음수 x도 $(*)$를 만족하게 된다. $m^2 - 4 < 0$이면 $x \to +\infty$일 때 좌변이 $-\infty$로 발산하므로, 큰 x에서 $(*)$가 성립하지 않는다. 어느 쪽도 허용되지 않으므로 $m^2 = 4$이고, $(*)$는 일차부등식이 된다. 일차부등식 $ax + b \geq 0$의 해집합이 $\{x : x \geq 3\}$일 필요충분조건은 $a > 0$이고 $3a + b = 0$인 것이다.

$m = 2$로 두자. 그러면 $a = 4c + 5$, $b = c^2 - 4$이므로 다음이 필요하다.

$$3(4c + 5) + c^2 - 4 = c^2 + 12c + 11 = (c + 1)(c + 11) = 0, \qquad 4c + 5 > 0.$$

근 $c = -11$은 $a = -39 < 0$을 주므로 적합하지 않다. 근 $c = -1$은 $a = 1 > 0$을 준다. 따라서

$$m = 2, \qquad c = -1$$

이 조건을 만족한다. 확인해 보면 $(2x - 1)^2 - (4x^2 - 5x + 4) = x - 3$이고, 이 식은 정확히 $x \geq 3$일 때 음이 아니다. ($m = -2$, $c = 1$로 잡아도 같은 $|mx + c|$를 주므로 똑같이 성립한다.)

소문항 (iv)

$g(x) = x^2 + px + q$, $L(x) = mx + c$라 하자. $|g| \leq L \iff -L \leq g \leq L$이므로, 주어진 부등식은 다음 두 조건이 모두 성립할 때, 그리고 그때에만 성립한다.

$$g(x) - L(x) \leq 0 \qquad \text{그리고} \qquad g(x) + L(x) \geq 0.$$

$g - L$과 $g + L$은 모두 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.

- $g - L \leq 0$인 집합은 닫힌구간(closed interval) $[a, b]$이다(공집합이거나 한 점일 수도 있다).
- $g + L \geq 0$인 집합은 실수 전체에서 열린구간 (r, s)를 뺀 것이다. $g + L$이 실근을 갖지 않으면 아무것도 빠지지 않는다.

따라서 해집합은 $[a, b]$에서 (r, s)를 뺀 것이다. 이것이 $[-5, 1] \cup [5, 7]$이 되려면 $a = -5$, $b = 7$(바깥쪽 끝점)이어야 하고, 빠진 틈은 정확히 $(1, 5)$여야 하므로 $r = 1$, $s = 5$이다. 그러므로

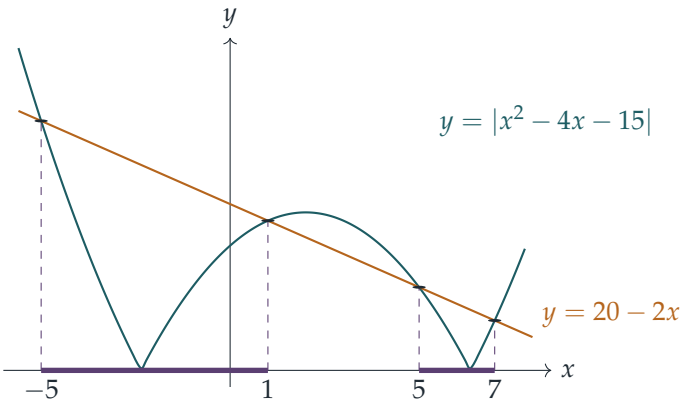
$$g(x) - L(x) = (x + 5)(x - 7) = x^2 - 2x - 35,$$
$$g(x) + L(x) = (x - 1)(x - 5) = x^2 - 6x + 5.$$

두 식을 더해 2로 나누면 $g(x) = x^2 - 4x - 15$이다. 빼서 2로 나누면 $L(x) = -2x + 20$이다. 따라서

$$p = -4, \qquad q = -15, \qquad m = -2, \qquad c = 20.$$

위의 모든 단계는 역으로도 성립하므로, 이 값들에 대해 해집합은 실제로 $[-5,1]\cup[5,7]$이다. 즉 $(x+5)(x-7)\le 0$이고 $(x-1)(x-5)\ge 0$이어야 한다. 또한 조건을 만족하는 값은 이것뿐이다.

그림에서 g의 근은 $2\pm\sqrt{19}\approx -2.36,\ 6.36$이다. 직선 $y=20-2x$는 $|g|$의 바깥쪽 두 팔과 $x=-5$, $x=7$에서 만나고, 위로 뒤집힌 봉우리를 $x=1$과 $x=5$에서 가로지른다.



검산

- (ii)(a)에서 $x=100$이면 $f(100)=\sqrt{39264}-198\approx 0.151$이고, 이는 $60/(\sqrt{39264}+198)\approx 0.151$과 일치한다.
- (iv)에서 $x=0$일 때 $|-15|=15\le 20$이므로 0은 해이다. $x=3$일 때 $|9-12-15|=18>14$이므로 3은 해가 아니다. $x=8$일 때 $|64-32-15|=17>4$이므로 8은 해가 아니다. 이는 $[-5,1]\cup[5,7]$과 맞는다. 촘촘한 x 격자에서 컴퓨터로 확인한 결과 네 해집합이 모두 맞았다.

흔한 실수

- 제곱해도 되는 이유를 밝히지 않고 제곱하는 것. 여기서 제곱이 정당한 것은 오직 양변이 음이 아니기 때문이다.
- (iii)에서 진짜 이차식을 그대로 두는 것. 이차부등식의 해집합은 결코 한쪽으로만 뻗은 반직선이 될 수 없으므로, x^2 항은 반드시 소거되어야 한다.
- (iv)에서 끝점을 잘못 짝짓는 것. 바깥쪽 끝점 $-5,7$은 $g-L$에, 안쪽 끝점 $1,5$(틈)는 $g+L$에 속한다.

STEP 너머

곡선 $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$은 쌍곡선이고, 소문항 (ii)는 점근선을 찾는 방법을 보여 준다. 곡선과 후보 직선의 차를 유리화(rationalise)하는 것이다. "켤레(conjugate)"를 곱하는 이 요령은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 극한을 다루는 표준 도구이다. (iv)에서처럼 $|g| \leq L$을 두 개의 한쪽 조건으로 나누어 쓰는 것도 해석학에서 절댓값이 들어간 부등식을 다루는 일상적인 방법이다. 다음 단계로는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)가 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.