풀이

STEP III 2024, 문제 12

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP III 2024, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

단위정사각형에서 균등하게(uniformly) 고른 점에 대하여, $\mathrm{P}(R \le r)$는 원점을 중심으로 하는 반지름 r인 원 안에 들어가는 정사각형 부분의 넓이일 뿐이다. $r > 1$이 되면 원이 정사각형의 두 변 밖으로 삐져나가고, 정사각형 안에 남은 영역은 두 개의 직각삼각형과 하나의 부채꼴(sector)로 깔끔하게 나뉜다. 기댓값(expectation)을 구하려면 미분하여 확률밀도함수(density)를 얻은 뒤 $rf(r)$를 적분한다. 부분적분(integration by parts)을 하면 다루기 까다로운 $\cos^{-1}$ 항이 사라지고, 쌍곡선 치환(hyperbolic substitution)으로 마무리한다.

풀이

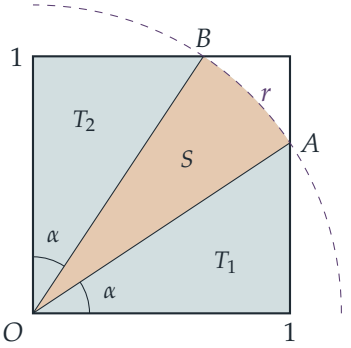
소문항 (i)

확률이 넓이와 같으므로, $\mathrm{P}(R \le r)$는 O로부터의 거리가 r 이하인 정사각형 위의 점들의 집합의 넓이이다.

$0 \le r \le 1$일 때 사분원 $x, y \ge 0$, $x^2 + y^2 \le r^2$이 정사각형 안에 완전히 들어가므로

$$\mathrm{P}(R \le r) = \tfrac{1}{4}\pi r^2 \qquad (0 \le r \le 1).$$

$1 \le r \le \sqrt{2}$일 때 원 $x^2 + y^2 = r^2$은 변 $x = 1$과 $A = (1, \sqrt{r^2 - 1})$에서, 변 $y = 1$과 $B = (\sqrt{r^2 - 1}, 1)$에서 만난다. $0 \le \sqrt{r^2 - 1} \le 1$이므로 두 점 모두 정사각형 위에 있다. OA가 x축과 이루는 각을 α라 하면 $\cos\alpha = 1/r$, 즉 $\alpha = \cos^{-1}(r^{-1})$이다. $y = x$에 대한 대칭성에 의해 OB는 y축과 같은 각 α를 이룬다.



원 안에 있는 정사각형 부분은 다음으로 이루어진다.

- 꼭짓점이 O, $(1,0)$, A인 삼각형 T_1: $(1,0)$에서 직각이고 직각을 낀 두 변의 길이가 1과 $\sqrt{r^2-1}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$이다.
- 꼭짓점이 O, $(0,1)$, B인 삼각형 T_2: T_1의 거울상이며 넓이 역시 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$이다.
- OA와 OB 사이에 있는 반지름 r인 부채꼴 S: 중심각이 $\frac{\pi}{2}-2\alpha$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}\pi r^2-r^2\alpha$이다.

이들을 더하면

$$\mathrm{P}(R\le r)=\sqrt{r^2-1}+\tfrac{1}{4}\pi r^2-r^2\cos^{-1}(r^{-1})\qquad(1\le r\le\sqrt{2}),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. ($r=1$에서는 두 식 모두 $\frac{1}{4}\pi$를 주고, $r=\sqrt{2}$에서는 $1+\frac{1}{2}\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}=1$이 되어 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.)

소문항 (ii)

$F(r)=\mathrm{P}(R\le r)$라 쓰고, 확률밀도함수를 $f=F'$이라 하자. $0<r<1$에서 $f(r)=\frac{1}{2}\pi r$이다. $1<r<\sqrt{2}$에서는

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}(r^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}},$$

가 필요하다. 여기서 $r>0$에 대하여 $\sqrt{1-r^{-2}}=\sqrt{r^2-1}/r$임을 이용하였다. 그러면 곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}f(r)&=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}+\tfrac{1}{2}\pi r-\left(2r\cos^{-1}(r^{-1})+\frac{r^2}{r\sqrt{r^2-1}}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\pi r-2r\cos^{-1}(r^{-1}).\end{aligned}$$

두 $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ 항이 상쇄되는데, 이는 좋은 신호이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R) &= \int_0^{\sqrt{2}} rf(r)\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{2}} \tfrac{1}{2}\pi r^2\,\mathrm{d}r - 2\int_1^{\sqrt{2}} r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi(\sqrt{2})^3}{6} - 2I = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - 2I,\end{aligned}$$

이고, 여기서 $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r$이다.

? **생각해 보기** I 안의 역코사인을 어떻게 없앨 수 있을까?

$\cos^{-1}(r^{-1})$을 미분하고(위에서 구했듯이 그 도함수는 대수적인 식이다) r^2을 적분하는 방식으로 부분적분한다.

$$\begin{aligned}I &= \Big[\tfrac{1}{3}r^3\cos^{-1}(r^{-1})\Big]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{3}\cdot\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

여기서 $\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$와 $\cos^{-1}1 = 0$을 이용하였다. (피적분함수는 $r=1$에서 유계가 아니지만, 그 근처에서 $1/\sqrt{2(r-1)}$처럼 행동하므로 적분은 수렴(converges)한다.) 그러므로

$$\mathrm{E}(R) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} + \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (iii)

$\sqrt{r^2-1}$을 보면 $r = \cosh t$로 치환하는 것이 떠오른다. 이때 $\mathrm{d}r = \sinh t\,\mathrm{d}t$이고 ($t \geq 0$이므로) $\sqrt{r^2-1} = \sinh t$이다. 적분 구간은 $t=0$과 $t=T$가 되는데, $\cosh T = \sqrt{2}$이므로 $\sinh T = 1$이고

$$T = \cosh^{-1}\sqrt{2} = \ln\big(\sqrt{2}+\sqrt{2-1}\big) = \ln\big(\sqrt{2}+1\big).$$

그러면

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r &= \int_0^T \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}\,\sinh t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t\Big]_0^T = \tfrac{1}{2}\ln\big(\sqrt{2}+1\big) + \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}.\end{aligned}$$

여기에 $\frac{2}{3}$을 곱하면

$$\mathrm{E}(R) = \tfrac{1}{3}\Big(\sqrt{2} + \ln\big(\sqrt{2}+1\big)\Big),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

검산

- F는 $r = 1$에서 연속이고(두 식 모두 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$를 준다), 가장 먼 꼭짓점인 $r = \sqrt{2}$에서 1에 도달한다.
- 확률밀도함수 $\frac{1}{2}\pi r - 2r\cos^{-1}(r^{-1})$은 $r = \sqrt{2}$에서 0이며, 마땅히 그래야 한다. 그만큼 멀리 떨어진 점은 꼭짓점 하나뿐이기 때문이다.
- 수치적으로 $\mathrm{E}(R) = \frac{1}{3}(1.41421 + 0.88137) \approx 0.7652$이며, $\frac{1}{2}$과 $\sqrt{2}$ 사이에 있으므로 타당하다. 무작위 점 4×10^5개를 컴퓨터로 시뮬레이션한 결과 평균 거리는 약 0.766이었고, 경험적 분포함수(distribution function)는 여러 r 값에서 F와 0.002 이내로 일치하였다.

흔한 실수

- 부채꼴의 중심각을 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ 대신 $\frac{\pi}{2} - \alpha$로 잡는 것: 두 변 **각각**에서 삼각형이 하나씩 잘려 나간다.
- $\cos^{-1}(r^{-1})$의 도함수의 부호를 틀리는 것: ($\cos^{-1}$과 r^{-1}에서 각각 나오는) 두 음의 부호가 상쇄되므로 도함수는 양수이다.

STEP 너머

이 문제는 기하 확률(geometric probability)을 처음 맛보는 것이다. 즉 단위정사각형의 한 꼭짓점에서 그 내부의 무작위 점까지의 평균 거리를 구한 것이다. 짝을 이루는 문제인, 단위정사각형 안의 **두** 무작위 점 사이의 평균 거리도 $\ln(1 + \sqrt{2})$를 포함하는 비슷하지만 더 복잡한 닫힌 형태의 답을 가지며, 이중적분(double integral)과 변수변환(change of variable)의 고전적인 연습 문제이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 기하학적으로 정의된 분포와 분포함수로부터 기댓값을 계산하는 방법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.