풀이

STEP III 2024, 문제 11

확률과 통계 • 이항분포의 기댓값

> **STEP III 2024, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

(i)의 항등식(identity)은 합의 아래쪽 절반에 있는 각 항 $r\binom{2n}{r}$를 위쪽 절반의 한 항과 짝짓는다. 이 대칭성이 바로 X를 다루는 데 필요한 것이다. 앞면과 뒷면 중 더 많은 쪽의 개수는 앞면의 개수이거나 뒷면의 개수이고, 앞면과 뒷면의 역할을 바꾸면 기댓값(expectation)이 합의 위쪽 절반으로 접힌다. 그다음 (iii)은 비(ratio) 판정이고, (iv)는 한 줄이면 충분하다.

풀이

소문항 (i)

$1 \le r \le 2n$일 때, r를 $r!$과 약분하면

$$r\binom{2n}{r} = \frac{r\,(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = \frac{(2n)!}{(r-1)!\,(2n-r)!}.$$

다른 쪽에서는 $2n-(2n+1-r) = r-1$이므로

$$(2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \frac{(2n+1-r)\,(2n)!}{(2n+1-r)!\,(r-1)!} = \frac{(2n)!}{(2n-r)!\,(r-1)!},$$

이고, 여기서도 분자의 인수를 계승(factorial)과 약분하였다. ($2n+1-r$가 1과 $2n$ 사이에 있어서 두 계승이 모두 의미를 가지려면 $1 \le r \le 2n$이어야 한다.) 두 식이 일치하므로 항등식이 성립한다.

합에서 $r = 0$인 항은 0이다. 나머지를 $1 \le r \le n$인 부분과 $n+1 \le r \le 2n$인 부분으로 나눈다. 아래쪽 부분에서 $s = 2n+1-r$로 놓는다. r가 1부터 n까지 변할 때 s는 $2n$부터 $n+1$까

지 내려가며 변하고, 항등식에 의하여

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{2n}{r} = \sum_{r=1}^{n} (2n+1-r)\binom{2n}{2n+1-r} = \sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}.$$

따라서 아래쪽 부분은 위쪽 부분과 같고,

$$\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r},$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

앞면의 개수를 H라 하면 $H \sim \mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$이고 $\mathrm{P}(H = r) = \binom{2n}{r}/2^{2n}$이다. 뒷면의 개수는 $2n - H$이므로 $X = \max(H, 2n - H)$이다. 즉 $H \geq n+1$이면 $X = H$, $H = n$이면 $X = n$, $H \leq n-1$이면 $X = 2n - H$이다. 따라서

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = \sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} + n\binom{2n}{n} + \sum_{r=0}^{n-1}(2n-r)\binom{2n}{r}.$$

마지막 합에서 $s = 2n - r$로 놓으면 s는 $2n$부터 $n+1$까지 내려가며 변한다. $\binom{2n}{r} = \binom{2n}{2n-r}$이므로 이 합은 $\sum_{s=n+1}^{2n} s\binom{2n}{s}$가 되어 첫 번째 합과 같다. (이것이 앞면과 뒷면의 대칭성이다. 뒷면이 s개 나올 확률은 앞면이 s개 나올 확률과 같다.)

> **생각해 보기** 범위의 절반에서만 더하는 $\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r}$를 어떻게 계산할 것인가?

바로 이것을 위해 소문항 (i)이 있다. 전체 범위에 대한 합은 주어져 있다. n 자리에 $2n$을 넣으면 $\sum_{r=0}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n \cdot 2^{2n-1}$이다. 따라서 (i)에 의하여

$$2\sum_{r=n+1}^{2n} r\binom{2n}{r} = 2n \cdot 2^{2n-1} = n\,2^{2n}.$$

그러므로

$$2^{2n}\,\mathrm{E}(X) = n\,2^{2n} + n\binom{2n}{n}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{E}(X) = n\left(1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\right),$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (iii)

$a_n = \binom{2n}{n}/2^{2n}$으로 놓으면 a_n은 양수이다. 그러면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n!\,n!}{(2n)!} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2},$$

이고, 여기서 $2n+2 = 2(n+1)$을 이용하였다. 이 비는 1보다 작고 $a_n > 0$이므로 모든 $n \geq 1$에 대하여 $a_{n+1} < a_n$이다. 따라서 이 수열(sequence)은 순감소(strictly decreasing)한다.

소문항 (iv)

받는 상금은 정확히 소문항 (ii)의 X이고 £n을 내므로, 낸 1파운드당 상금의 기댓값은

$$\frac{\mathrm{E}(X)}{n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1 + a_n.$$

(iii)에 의하여 a_n은 n이 가장 작을 때 가장 크므로 $n = 1$을 골라야 한다. 그러면 낸 1파운드당 $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$파운드를 돌려받으므로, 1파운드당 기대 이익은 50펜스(50p)이다. ("상금"이 이익을 뜻한다면 $\mathrm{E}(X)/n - 1 = a_n$이고, 결론은 같다.)

검산

- $n = 1$(두 번 던지기)일 때, HH나 TT이면 $X = 2$이고 HT나 TH이면 $X = 1$이므로 $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$이다. 공식으로 구하면 $1 \cdot (1 + \frac{2}{4}) = \frac{3}{2}$이다.
- $n = 2$일 때 공식은 $2(1 + \frac{6}{16}) = \frac{11}{4}$을 주므로, 1파운드당 돌려받는 금액은 $\frac{11}{8} = 1.375 < 1.5$이다. $n = 3$일 때는 $\frac{21}{16} = 1.3125$로, (iii)이 예측한 대로 계속 감소한다.
- $n \leq 5$에 대하여 가능한 2^{2n}가지 던지기 결과를 모두 컴퓨터로 확인하여 $\mathrm{E}(X)$의 공식을 검증하였다.

흔한 실수

- $H = n$인 항을 두 번 세거나 아예 세지 않는 것. 이 항은 나눈 두 부분 어디에도 속하지 않으며 $n\binom{2n}{n}$을 한 번만 더한다.
- (iv)에서 낸 1파운드당 $\mathrm{E}(X)$가 아니라, 한없이 커지는 $\mathrm{E}(X)$ 자체를 최대화하려는 것.

STEP 너머

초과분 $\mathrm{E}(X) - n = na_n$은 단순 무작위 행보(simple random walk)가 출발점에서 떨어진 거리의 기댓값의 절반이다. 스털링 공식(Stirling's formula)에 의하여 $a_n \approx 1/\sqrt{\pi n}$이므로, 이 초과분은 $\sqrt{n/\pi}$처럼 커진다. 즉 앞면과 뒷면 개수의 전형적인 차이는 던진 횟수의 제곱근처럼 커진다. 한편 1파운드당 초과분 a_n은 0으로 수렴(converge)하는데, 이것이 바로 큰 수의 법칙(law of large numbers)이 작동하는 모습이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문서)에서 무작위 행보와 이러한 극한을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.