풀이

STEP III 2024, 문제 10

역학 • 넘어짐과 미끄러짐

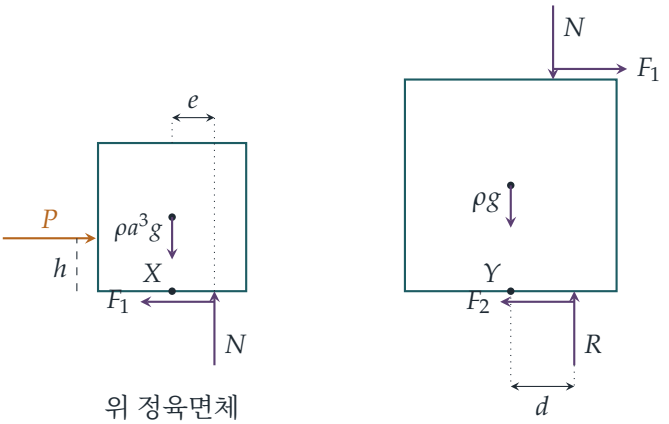
> **STEP III 2024, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 소문항은 평형(equilibrium)이 깨지는 네 가지 방식을 비교하는 문제이다. 위 정육면체가 미끄러지거나, 아래 정육면체가 미끄러지거나, 위 정육면체가 넘어지거나(topple), 두 정육면체가 함께 넘어지는 경우이다. 각각은 P의 고유한 임계값에서 일어나며, P가 0에서부터 커질 때 가장 작은 임계값을 가진 경우가 먼저 일어난다. 알맞은 점에 대해 모멘트(moment)를 잡으면, 즉 전체 계에 대해서는 Y, 위 정육면체만에 대해서는 X를 잡으면, 소문항 (i)의 수직항력(normal reaction)의 작용 위치를 아주 적은 노력으로 얻을 수 있다. 그리고 넘어짐은 이 수직항력 중 하나가 그것이 작용하는 면의 모서리에 도달할 때 시작된다.

풀이

두 정육면체를 강체(rigid body)로 모형화한다. 아래 정육면체의 질량은 ρ이고 위 정육면체의 질량은 ρa^3이다. P는 오른쪽으로 수평하게 작용하고, 아래 정육면체의 윗면으로부터 높이 h, 즉 지면으로부터 높이 $1+h$인 곳에 작용한다고 하자. P가 수평이므로, 임의의 점에 대한 P의 모멘트는 높이에만 의존하고 면 위의 어느 지점에 작용하는지와는 무관하다.



여기서 N과 F_1은 두 정육면체 사이의 수직항력과 마찰력(friction)이며(뉴턴(Newton)의 제3법칙에 따라 각 정육면체에 표시하였다), X로부터 거리 e인 곳에 작용한다. R와 F_2는 지면이 주는 수직항력과 마찰력이며, Y로부터 거리 d인 곳에 작용한다.

소문항 (i)

전체 계. 외력은 P, 두 무게, R, F_2뿐이다. 힘을 성분으로 분해하면

$$F_2 = P, \qquad R = \rho g + \rho a^3 g = (1 + a^3)\rho g.$$

Y에 대한 모멘트를 잡는다. 두 무게는 모두 Y를 지나는 연직선을 따라 작용하고(각 질량중심(centre of mass)이 Y의 바로 위에 있다), F_2는 Y를 지나는 지면을 따라 작용하므로, 이들의 모멘트는 모두 0이다. 남는 것은 높이 $1 + h$에 작용하는 P와, 이와 평형을 이루는 거리 d의 R이다.

$$R\,d = P(1 + h) \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{P(1 + h)}{(1 + a^3)\rho g},$$

이 거리는 Y로부터 P의 방향으로 잰 것이다. 이것이 구하려던 결과이다.

위 정육면체만. 힘을 분해하면 $F_1 = P$, $N = \rho a^3 g$이다. X에 대한 모멘트를 잡으면 무게와 F_1의 모멘트는 0이므로 $Ne = Ph$이고

$$e = \frac{Ph}{\rho a^3 g},$$

이 거리 역시 X로부터 P의 방향으로 잰 것이다.

소문항 (ii)

아무것도 움직이지 않는 동안, 마찰력은 두 정육면체 사이에서 $F_1 = P$, 지면에서 $F_2 = P$이다. 어떤 접촉면에서 필요한 마찰력이 수직항력의 μ배를 넘으면 그곳에서 미끄러

짐(slipping)이 일어나므로

$$\text{위 정육면체가 아래 정육면체 위에서 미끄러지는 조건: } P > \mu\rho a^3 g,$$
$$\text{아래 정육면체가 지면 위에서 미끄러지는 조건: } P > \mu(1+a^3)\rho g.$$

$a^3 < 1 + a^3$이므로 첫 번째 임계값이 항상 더 작다. P가 0에서부터 커질 때(넘어짐이 끼어들지 않는다면), 위 정육면체가 먼저 한계에 도달하여 미끄러지기 시작하고, 이때 지면의 마찰력은 아직 한계에 한참 못 미친다. 위 정육면체가 미끄러지기 시작한 뒤 그것이 아래 정육면체에 가하는 마찰력은 $\mu\rho a^3 g$이며, 이는 지면이 제공할 수 있는 $\mu(1+a^3)\rho g$보다 여전히 작으므로 아래 정육면체는 그대로 있다. 따라서 평형은 아래 정육면체의 미끄러짐이 아니라 위 정육면체의 미끄러짐으로 깨진다.

소문항 (iii)

평평한 면 위에 놓인 물체는 그 물체에 작용하는 수직항력이 면의 모서리에 도달할 때 막 넘어지려 한다. 위 정육면체 밑면의 반너비는 $\frac{1}{2}a$이고 아래 정육면체 밑면의 반너비는 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 모든 힘을 ρg 단위로 재면, P의 네 임계값은 다음과 같다.

$$P_{\text{미끄럼}} = \mu a^3 \text{ (위와 아래 사이)}, \qquad P_{\text{지면}} = \mu(1+a^3),$$
$$P_{\text{위}} = \frac{a^4}{2h} \text{ } (e = \tfrac{1}{2}a\text{에서}), \qquad P_{\text{함께}} = \frac{1+a^3}{2(1+h)} \text{ } (d = \tfrac{1}{2}\text{에서}).$$

아래 정육면체가 넘어지면 위 정육면체도 함께 넘어지므로, $d = \frac{1}{2}$는 두 정육면체가 함께 넘어짐을 뜻한다.

이제 $a = 1$로 두면 $P_{\text{미끄럼}} = \mu$, $P_{\text{위}} = \frac{1}{2h}$, $P_{\text{함께}} = \frac{1}{1+h}$이다. 소문항 (ii)에 따라 $P_{\text{지면}}$은 무시해도 된다.

> **생각해 보기** 위 정육면체가 혼자 넘어지는 경우를 걱정해야 할까?

그럴 필요는 없지만 반드시 확인해야 한다. $h < a = 1$이므로 $2h < 1 + h$이고, 따라서

$$P_{\text{위}} = \frac{1}{2h} > \frac{1}{1+h} = P_{\text{함께}}.$$

위 정육면체가 혼자 넘어지기 전에 두 정육면체가 함께 넘어진다. 그러므로 경쟁은 $P_{\text{미끄럼}} = \mu$와 $P_{\text{함께}} = 1/(1+h)$ 사이에서만 일어난다.

- $\mu(1+h) < 1$이면 $\mu < \frac{1}{1+h}$이므로 미끄러짐의 임계값에 먼저 도달하여, 위 정육면체가 아래 정육면체 위에서 미끄러진다.
- $\mu(1+h) > 1$이면 $\frac{1}{1+h} < \mu$이므로 넘어짐의 임계값에 먼저 도달하여, 두 정육면체가 함께 넘어진다.

소문항 (iv)

미끄러짐이 일어나지 않는다면 경쟁은 $P_{\text{위}}$와 $P_{\text{함께}}$ 사이에서 일어난다. 위 정육면체가 먼저 넘어질 필요충분조건은

$$\frac{a^4}{2h} < \frac{1+a^3}{2(1+h)} \iff a^4(1+h) < h(1+a^3) \iff a^4 < h\big(1+a^3-a^4\big) = h\big(1+a^3(1-a)\big),$$

이다. 여기서 양변에 양수 $2h(1+h)$를 곱하였다. 이것이 바로 주어진 조건이므로, 이 조건 아래에서 평형은 위 정육면체가 넘어짐으로써 깨진다.

소문항 (v)

$a = \frac{1}{2}$일 때 세 가지가 필요하다.

- (iv)의 조건: $h\big(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{16}$, 즉 $\frac{17}{16}h > \frac{1}{16}$이므로 $h > \frac{1}{17}$이다.
- 문제의 설정에 따라 $h < a = \frac{1}{2}$이어야 한다.
- 넘어지기 전에 미끄러지지 않아야 한다: $P_{\text{위}} < P_{\text{미끄럼}}$, 즉 $\dfrac{1/16}{2h} < \dfrac{\mu}{8}$, 다시 말해 $\mu > \dfrac{1}{4h}$이다. ((ii)에 따라 지면에서의 미끄러짐은 결코 먼저 일어나지 않는다.) 또한 $\mu < 1$이어야 하므로 $h > \frac{1}{4}$이어야 한다.

따라서 $\frac{1}{4} < h < \frac{1}{2}$와 $h > \frac{1}{17}$을 만족하는 $h = \frac{2}{5}$를 택한다. 그러면 $\frac{5}{8} < \mu < 1$이어야 하므로 $\mu = \frac{3}{4}$로 잡는다. 이때 임계값(ρg 단위)은

$$P_{\text{위}} = \tfrac{5}{64} \approx 0.078, \quad P_{\text{미끄럼}} = \tfrac{3}{32} \approx 0.094, \quad P_{\text{함께}} = \tfrac{45}{112} \approx 0.402, \quad P_{\text{지면}} = \tfrac{27}{32} \approx 0.844.$$

가장 작은 값은 $P_{\text{위}}$이므로, P가 커질 때 어떤 미끄러짐보다 먼저 위 정육면체가 넘어진다. 즉 (iv)의 상황이 실제로 일어난다.

검산

- $P \to 0$이면 d와 e 모두 0으로 수렴한다. 미는 힘이 없으면 각 수직항력이 질량중심의 바로 아래에 작용하므로 당연한 결과이다.
- 아래 정육면체만에 대해 모멘트를 잡으면(무게, 거리 d에 작용하는 R와 F_2, 그리고 X로부터 거리 e에 반대 방향으로 작용하는 N과 F_1) $Rd = Ne + F_1 \cdot 1$을 얻고, 이는 $P(1+h) = Ph + P$이다. 따라서 (i)의 두 답은 서로 일관된다.
- $a = \frac{1}{2}$, $h = \frac{2}{5}$, $\mu = \frac{3}{4}$에 대해 위의 네 임계값을 정확히 계산하였고, (ii)–(iv)의 비교는 a, h, μ를 무작위로 여러 번 골라 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- (iii)에서 미끄러짐과 두 정육면체가 함께 넘어지는 경우만 비교하고, 위 정육면체가 먼저 넘어질 수 없음을 보이지 않는 실수.
- 위 정육면체에 대해 지면 위의 점을 기준으로 모멘트를 잡아, 접촉면의 마찰력 F_1이 식에 끼어들게 하는 실수. X에 대한 모멘트를 잡으면 이를 피할 수 있다.
- 전체 계의 모멘트 방정식에서 지면으로부터 P의 높이로 $1+h$ 대신 h를 쓰는 실수.

STEP 너머

여기서 각각의 평형 붕괴 방식은 힘에 대한 하나의 부등식이며, 평형은 이 부등식이 모두 동시에 성립하는 동안 유지된다. 가장 먼저 깨지는 것은 임계값이 가장 작은 부등식이다. 이처럼 여러 선형 제약 조건 가운데 "활성화되는(binding)" 하나가 있다는 생각은 공학에서 석조 구조물이나 쌓아 올린 구조물에 쓰이는 극한 해석(limit analysis)의 핵심이며, 더 넓게는 선형계획법(linear programming)의 핵심이기도 하다. 마찰, 토크, 강체의 정역학을 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.