풀이

STEP III 2024, 문제 1

순수수학 • 망원급수

> **STEP III 2024, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

여기서 다루는 합은 모두 같은 방법으로 처리한다. 먼저 일반항을 부분분수(partial fractions)로 분해하고, $1/r^2$의 상수배인 조각들을 골라낸다(이것들을 더하면 S_N의 상수배가 된다). 나머지는 모두 $f(r)-f(r+1)$ 꼴의 차로 정리하는데, 이런 차들은 더하면 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 처음부터 끝까지 N까지의 유한합으로 계산하고, 모든 조각의 극한(limit)을 알게 되는 마지막 단계에서만 $N\to\infty$로 보낸다.

풀이

소문항 (i)

공통분모 $r^2(r+1)$로 통분하면

$$\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}=\frac{r^2-r(r+1)+(r+1)}{r^2(r+1)}=\frac{r^2-r^2-r+r+1}{r^2(r+1)}=\frac{1}{r^2(r+1)},$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

이제 $r=1$부터 N까지 더한다. $1/r^2$ 항들은 S_N이 되고, 나머지 두 항은 연쇄적으로 소거된다.

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-1\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N+1}-\tfrac{1}{N}\right)=\frac{1}{N+1}-1.$$

따라서

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^2(r+1)}=S_N-1+\frac{1}{N+1}.$$

$N \to \infty$일 때 $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$이고 $\frac{1}{N+1} \to 0$이므로, 우변은 $\frac{1}{6}\pi^2 - 1$로 수렴한다. 무한급수는 정의에 따라 부분합(partial sums)의 극한이므로

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)} = \tfrac{1}{6}\pi^2 - 1.$$

소문항 (ii)

다음과 같이 놓는다.

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r+1} + \frac{D}{r+2}.$$

양변에 $r^2(r+1)(r+2)$를 곱하고 가림법(cover-up rule)을 쓴다. $r = 0$을 대입하면 $B = \frac{1}{2}$이고, $r = -1$을 대입하면 $C = \frac{1}{(-1)^2 \cdot 1} = 1$이며, $r = -2$를 대입하면 $D = \frac{1}{4 \cdot (-1)} = -\frac{1}{4}$이다. r이 클 때 좌변은 $1/r^4$ 정도의 크기이므로 우변의 $1/r$ 항들은 서로 상쇄되어야 한다. 즉 $A + C + D = 0$이고, 따라서 $A = -\frac{3}{4}$이다. 그러므로

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)}.$$

생각해 보기 세 항 $-\frac{3}{4r}$, $\frac{1}{r+1}$, $-\frac{1}{4(r+2)}$는 하나의 연쇄 소거되는 차로 보이지 않는다. 어떻게 하면 이것들이 연쇄적으로 소거되게 할 수 있을까?

가운데 계수를 $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$로 쪼개어, 각 조각이 이웃한 항과 짝을 이루게 한다.

$$-\frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).$$

이제 각 괄호는 연쇄적으로 소거된다.

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}.$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} &= \tfrac{1}{2}S_N - \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}S_N - \frac{5}{8} + \frac{3}{4(N+1)} - \frac{1}{4(N+2)}.\end{aligned}$$

$N \to \infty$로 보내면 마지막 두 항은 0으로 수렴하고 $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$이므로

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{5}{8}.$$

소문항 (iii)

목표 식의 우변에는 $\frac{2}{r^2(r+1)}$이 있으므로 두 항을 비교한다. 소문항 (i)을 이용하면

$$\frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{2}{r+1} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r^2}.$$

한편

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r(r+1)} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r+1},$$

이다. 여기서 두 단계 모두에서 $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r(r+1)}$을 이용했다. 두 식을 빼면

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} - \frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{r^2},$$

즉

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right).$$

? 생각해 보기 왜 처음부터 무한급수를 항별로 더하면 안 될까?

무한합을 재배열하는 것은 각 조각이 수렴(converge)한다는 것을 안 뒤에야 안전하므로, 먼저 N까지 더한다. 괄호 부분은 연쇄적으로 소거된다.

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{N} \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

소문항 (i)에 의해 $N \to \infty$일 때 우변의 첫 번째 합은 ($2(\frac{1}{6}\pi^2 - 1)$로) 수렴하고, $\frac{1}{(N+1)^2} \to 0$이다. 따라서 좌변도 수렴하며,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2(r+1)} - 1,$$

이므로 원하는 식이 성립한다. 양변의 값은 모두 $\frac{1}{3}\pi^2 - 3$이다.

검산

- 소문항 (ii)에서 $N = 1$로 놓으면, 합은 단 하나의 항 $\frac{1}{6}$이고 공식은 $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{12-15+9-2}{24} = \frac{1}{6}$을 준다.
- 수치로 보면 $\frac{1}{6}\pi^2 - 1 \approx 0.644934$, $\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{5}{8} \approx 0.197467$, $\frac{1}{3}\pi^2 - 3 \approx 0.289868$이다. 컴퓨터로 각 급수의 처음 백만 개 항을 더하면 세 값 모두 적어도 소수점 아래 아홉째 자리까지 재현된다.
- 세 소문항의 유한합 항등식은 모두 59 이하의 모든 N에 대해 유리수 연산으로 정확하게 확인했다.

흔한 실수

- 연쇄 소거되는 합의 양 끝 항을 잘못 구하는 것. 특히 $\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}$의 합은 1이 아니라 $\frac{1}{2}$에서 시작한다.
- 조화급수(harmonic series) 꼴의 조각들을 유한합 안에서 함께 묶어 두지 않고, 발산(diverge)하는 $\sum \frac{1}{r}$ 같은 개별 무한급수로 쪼개는 것.

STEP 너머

$\sum 1/r^2 = \pi^2/6$이라는 값은 바젤 문제(Basel problem)에 대한 오일러(Euler)의 해답으로, 대학에서는 보통 푸리에 급수(Fourier series)나 $\sin x$의 곱 공식을 이용해 증명한다. 여기서 유한합을 조심스럽게 다룬 것은 바로 해석학(analysis) 강의에서 엄밀하게 정립하는 내용이다. 즉 급수는 부분합의 극한이고, 수렴하는 급수들의 합은 서로 결합할 수 있지만 발산하는 급수는 그럴 수 없다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 급수를 이런 방식으로 다루며, 다음에 읽기 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.