풀이

# STEP II 2024, 문제 9

역학 • 포물체 운동

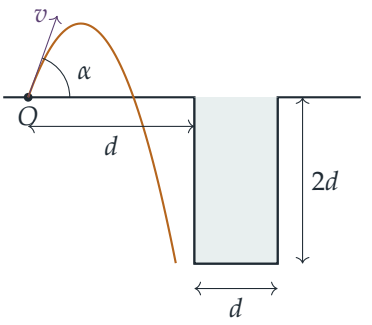
> **STEP II 2024, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

모든 것은 궤적 방정식(trajectory equation) $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$를 $t = \tan\alpha$에 대한 이차식(quadratic)으로 쓰는 데서 출발한다. 입자가 바닥에 깔끔하게 떨어진다는 것은 두 가지를 뜻한다. 하나는 입자가 가까운 쪽 모서리에 도달할 때 아직 지면보다 위에 있어야 한다는 것이고, 다른 하나는 먼 쪽 벽에 도달하기 전에 이미 바닥 높이보다 아래로 내려와 있어야 한다는 것이다. 각 조건은 $t$에 대한 이차부등식(quadratic inequality)이 되고, 완전제곱식 만들기(completing the square)를 하면 필요한 꼴로 바뀐다. 그러면 (ii)는 $t$의 두 허용 범위가 겹친다는 것을 보이기만 하면 된다.

## 풀이

입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받는 점 포물체(projectile)로 모형화한다. 원점을 발사 지점으로 잡고, $x$축은 수평으로 도랑 쪽을, $y$축은 연직 위쪽을 향하게 한다. 그러면 가까운 쪽 벽은 직선 $x = d$, 먼 쪽 벽은 $x = 2d$이고, 바닥은 $d < x < 2d$에서 $y = -2d$이다.




시각 $T$에서 수평 속도는 $v\cos\alpha$, 연직 속도는 $v\sin\alpha - gT$이므로, $T$를 소거하면

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = xt - \frac{x^2(1+t^2)}{2\lambda d},$$

를 얻는다. 여기서 $t = \tan\alpha$이고, $v^2 = \lambda dg$와 $\sec^2\alpha = 1 + t^2$을 이용하였다.

**소문항 (i)(a)**

도랑 앞의 지면과 가까운 쪽 벽에 닿지 않으려면, $x = d$일 때 입자가 지면보다 엄격하게 위에 있어야 한다. (그곳에서 $y = 0$ 이하라면 이미 지면에 부딪혔거나 가까운 쪽 벽에 부딪히게 된다.) 따라서

$$y(d) = dt - \frac{d(1+t^2)}{2\lambda} > 0 \iff 2\lambda t - 1 - t^2 > 0 \iff t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 < \lambda^2 - 1,$$

이다. 여기서 $2\lambda/d > 0$을 곱하였다. 즉,

$$(\tan\alpha - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1,$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 좌변은 제곱이므로 $\lambda^2 - 1 > 0$이고, $\lambda = v^2/(dg) > 0$이므로 $\lambda > 1$이다.

**소문항 (i)(b)**

이제 먼 쪽 벽을 생각하자. 경로는 아래로 볼록한 것이 아니라 위로 볼록한(아래로 열린) 포물선이고, $x = d$에서 바닥 높이 $-2d$보다 위에 있다. 이 경로가 $x = 2d$에 이르기 전에 $y = -2d$(바닥)에 도달하는 것은 $x = 2d$에서 이미 그 높이보다 아래에 있을 때, 즉 $y(2d) < -2d$일 때와 정확히 같다. 반대로 $y(2d) \geq -2d$이면 입자는 바닥에 닿지 않은 채 $x = 2d$에 도달하므로, 먼 쪽 벽에 닿는다(또는 도랑을 아예 넘어간다).

? **생각해 보기** 왜 한 점 $x = 2d$만 살펴보아도 충분한가?

$y(x)+2d$는 최고차항의 계수가 음수인 $x$에 대한 이차식이고 $x=d$에서 양수이기 때문이다. 이 이차식은 $x=d$보다 큰 쪽에 근을 정확히 하나 가지며, 그 근이 $2d$보다 앞에 있는 것은 이 차식이 $x=2d$에서 이미 음수일 때와 정확히 같다.

따라서

$$y(2d)=2dt-\frac{4d^2(1+t^2)}{2\lambda d}<-2d \iff \lambda t-(1+t^2)<-\lambda \iff t^2-\lambda t+1-\lambda>0,$$

이어야 한다. 여기서 $\lambda/(2d)>0$을 곱하였다. 4를 곱하고 완전제곱식을 만들면

$$4t^2-4\lambda t+\lambda^2>\lambda^2-4+4\lambda, \qquad \text{즉} \qquad (2\tan\alpha-\lambda)^2>\lambda^2+4(\lambda-1),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

**$\alpha>45^\circ$ 이끌어 내기.** (a)에 의해 $\lambda>1$이므로 $\lambda^2+4(\lambda-1)>\lambda^2>0$이다. $s=\sqrt{\lambda^2+4\lambda-4}$로 두면 $s>\lambda$이다. (b)의 부등식은

$$2t>\lambda+s \qquad \text{또는} \qquad 2t<\lambda-s.$$

를 뜻한다. $s>\lambda$이므로 두 번째 경우는 $t<0$을 준다. 그런데 (a)에 의해 $t>0$이어야 한다. $(t-\lambda)^2<\lambda^2-1<\lambda^2$에서 $|t-\lambda|<\lambda$이므로 $t>0$이기 때문이다. (물리적으로 보면, 입자는 가까운 쪽 모서리를 넘기 위해 위로 올라가야 한다.) 따라서 첫 번째 경우가 성립하고,

$$2t>\lambda+s>\lambda+\lambda=2\lambda>2,$$

이므로 $\tan\alpha>\lambda>1$이다. $0<\alpha<90^\circ$이므로 $\alpha>45^\circ$이다.

**소문항 (ii)**

역으로, 두 조건을 함께 만족하면 충분하다. $y(d)>0$이면, $y(0)=0$이고 $y$가 오목(concave)하므로 구간 $0<x\le d$ 전체에서 $y>0$이다. 따라서 입자는 지면과 가까운 쪽 벽을 넘는다. 또 $y(2d)<-2d$이면, 입자는 $d$와 $2d$ 사이의 어떤 $x$에서 바닥에 도달하고 그때까지 도랑 안에 머문다. 그러므로 모든 $\lambda>1$에 대하여 두 부등식을 모두 만족하는 $t>0$이 존재함을 보이기만 하면 된다.

(a)로부터 허용되는 값은 $\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}<t<\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}$이다. (b)와 $t>0$으로부터 허용되는 값은 $t>\frac{1}{2}(\lambda+s)$이다. 두 조건을 모두 만족하는 $t$가 존재하려면

$$\tfrac{1}{2}(\lambda+s)<\lambda+\sqrt{\lambda^2-1} \iff s<\lambda+2\sqrt{\lambda^2-1}.$$

이면 된다. ($\frac{1}{2}(\lambda+s)>\lambda>\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}$이므로 (a)의 하한은 문제가 되지 않는다.) 양변이 모두 양수이므로 제곱할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\lambda^2+4\lambda-4<\lambda^2+4\lambda\sqrt{\lambda^2-1}+4(\lambda^2-1)\\
\iff\quad &4\lambda<4\lambda\sqrt{\lambda^2-1}+4\lambda^2\\
\iff\quad &1<\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda,
\end{aligned}$$

여기서 $4\lambda > 0$으로 나누었다. $\lambda > 1$이므로 마지막 줄은 참이다. 따라서 구간

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}\right) < \tan\alpha < \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

은 공집합이 아니다. $\tan\alpha$가 이 구간에 속하도록 $\alpha$를 고르면(tan은 $(0°, 90°)$에서 모든 양수 값을 가지므로 가능하다) 입자는 양쪽 벽 어디에도 닿지 않고 바닥에 떨어진다.

## 검산

- $\lambda = 2$로 두자. 구간은 $1 + \sqrt{2} < \tan\alpha < 2 + \sqrt{3}$이고, 이는 정확히 $67.5° < \alpha < 75°$이다. $y = xt - x^2(1 + t^2)/(4d)$에 $\alpha = 70°$를 넣어 보면 $y(d) \approx 0.61d > 0$이고 $y(2d) \approx -3.05d < -2d$로, 예상대로이다.
- $\lambda \to 1^+$일 때 구간의 양 끝은 모두 1로 다가가므로, 허용 범위는 $\alpha = 45°$로 줄어든다. $v^2 = dg$일 때 입자는 가까운 쪽 모서리에 겨우 도달할 수 있으며, 이를 위해서는 최대 도달 거리를 주는 각이 필요하다.
- 무작위로 고른 수천 개의 $(\lambda, \alpha)$ 쌍에 대해 운동을 시간 단계별로 진행시키는 컴퓨터 검산을 해 보았더니, 모든 경우에 두 부등식과 일치하였다.

## 흔한 실수

- 조건을 $y(d) > 0$이 아니라 $y(d) > -2d$(바닥보다 위)로 잡는 것. 가까운 쪽 벽은 지면 높이까지 솟아 있다.
- (b)에서 $2\tan\alpha < \lambda - s$인 경우를 배제하는 것을 잊는 것. 이를 위해서는 $\tan\alpha > 0$이라는 사실이 필요하다.
- (ii)에서 양변이 양수임을 먼저 확인하지 않고 부등식을 제곱하는 것.

## STEP 너머

여기서는 물리적 조건("도랑 안에 떨어진다")이 발사 매개변수 공간에서 부등식으로 잘라 낸 영역이 되고, 문제는 그 영역이 공집합이 아닌지를 묻는 것이 된다. 이것이 최적화(optimisation)와 제어(control)의 출발점이다. 즉, 실현 가능한(feasible) 입력의 집합을 기술하고 그 경계를 찾는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 그 확장(공기 저항, 회전 좌표계)을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.