풀이

# STEP II 2024, 문제 8

순수수학 • 산술-기하 평균

> **STEP II 2024, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.6 절 **산술–기하 평균**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/agm.html

## 핵심 아이디어

두 수열은 서로를 조여 간다. 산술평균은 내려오고 기하평균은 올라가며, 그 차이는 매번 적어도 절반으로 줄어든다. 따라서 두 수열은 공통의 극한 $M$으로 수렴하는데, 이것이 $x_0$와 $y_0$의 **산술–기하 평균**(arithmetic–geometric mean)이다. 소문항 (ii)에서는 치환(substitution)을 통해 쌍 $(p, q)$에 대한 적분이 그 두 평균으로 이루어진 쌍에 대한 적분으로 바뀌므로, 반복을 진행하는 동안 적분값은 전혀 변하지 않는다. $n \to \infty$로 보내면 이 적분은 직접 계산할 수 있는 적분으로 줄어든다.

## 풀이

### 소문항 (i)

먼저 수학적 귀납법(induction)으로 모든 $n$에 대하여 $0 < y_n < x_n$임을 보인다. $n = 0$일 때는 성립한다. $0 < y_n < x_n$이라고 가정하자. 그러면 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$이므로

$$0 < \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n},$$

이고, 이를 정리하면 $\frac{1}{2}(x_n + y_n) > \sqrt{x_n y_n}$, 즉 $y_{n+1} < x_{n+1}$이다. 또한 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > 0$이다. 이로써 귀납법이 완성되므로, 모든 $n \geq 0$에 대하여 $y_{n+1} < x_{n+1}$이다.

$y_n < x_n$을 이용하면

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) < \tfrac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n,$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n,$$

이다. 여기서 둘째 줄은 $x_n > y_n > 0$이라는 것과 제곱근 함수가 증가함수라는 사실을 이용한 것이다.

따라서 $(y_n)$은 증가수열이다. 또한 위로 유계이다. $y_n < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0$이므로 모든 $n$에 대하여 $y_n < x_0$이다. 그 정리에 의하여 어떤 $M \le x_0$에 대하여 $y_n \to M$이다. (수열이 $y_0$에서부터 증가하므로 $M \ge y_0 > 0$이기도 하다.)

차이에 대해서는, 왼쪽 부등식 $x_{n+1} - y_{n+1} > 0$은 처음에 이미 증명한 것이다. 오른쪽 부등식은 $y_{n+1} > y_n$이므로

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n - y_n).$$

이를 반복해서 적용하면

$$0 < x_n - y_n < \frac{x_0 - y_0}{2^n} \to 0,$$

이므로 조임 정리(squeeze theorem)에 의하여 $x_n - y_n \to 0$이다. 마지막으로 $x_n = y_n + (x_n - y_n)$은 $M$으로 수렴하는 수열과 0으로 수렴하는 수열의 합이므로 $x_n \to M$이기도 하다.

### 소문항 (ii)

$a = \tfrac{1}{2}(p+q)$, $g = \sqrt{pq}$로 두고, $t$에 대한 적분을 $J$라 하자.

**치환.** $x > 0$에 대하여 $t = \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{pq}{x}\right)$로 두면

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{pq}{x^2}\right) = \frac{x^2 + pq}{2x^2} > 0,$$

이므로 $t$는 순증가하며, $x \to 0^+$일 때 $-\infty$에서 $x \to \infty$일 때 $+\infty$까지 변한다. 즉 이 치환은 $(0, \infty)$를 실수 전체에 일대일로 대응시킨다. 이제 근호 안의 두 인수를 다시 쓴다.

$$pq + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + pq}{2x}\right)^2,$$
$$\tfrac{1}{4}(p+q)^2 + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(p^2 + 2pq + q^2 + x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right)$$
$$= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}.$$

$x > 0$이고 $x^2 + pq > 0$이므로 곱의 제곱근은

$$\frac{x^2 + pq}{2x} \cdot \frac{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}{2x}.$$

이다. 따라서

$$J = \int_0^\infty \frac{x^2+pq}{2x^2} \cdot \frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}} = 2\,\mathrm{I}(p,q).$$

**같은 적분을 직접 읽기.** $\frac{1}{4}(p+q)^2 = a^2$이고 $pq = g^2$이므로 $J$의 피적분함수는 $1/\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}$이며, 이는 $t$에 대한 우함수(even function)이다. 따라서

$$J = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}} = 2\,\mathrm{I}(a,g),$$

이다. $a, g$는 양수이고 $g < a$이므로(소문항 (i)의 부등식과 $p \neq q$에 의하여) 이렇게 쓸 수 있다. $J$에 대한 두 식을 비교하면

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q), \mathrm{g}(p,q)\big),$$

을 얻으며, 이것이 보이려던 것이다.

**$\mathrm{I}(x_0,y_0)$의 계산.** $0 < y_n < x_n$이므로 이 결과를 $(p,q) = (x_n, y_n)$에 적용할 수 있고, 그러면 $\mathrm{I}(x_n,y_n) = \mathrm{I}(x_{n+1},y_{n+1})$이다. 따라서

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \mathrm{I}(x_n,y_n) \quad \text{모든} n.$$

> ? **생각해 보기** $n \to \infty$로 보내서 적분이 $\mathrm{I}(M,M)$으로 수렴한다고 말하고 싶다. 무한 구간에서의 적분 안으로 극한을 옮기는 것을 어떻게 정당화할 수 있을까?

조임을 이용하면 까다로운 극한 논증을 피할 수 있다. $0 < y_n < x_n$이면 모든 $x$에 대하여

$$(y_n^2+x^2)^2 \le (x_n^2+x^2)(y_n^2+x^2) \le (x_n^2+x^2)^2,$$

이므로, 제곱근을 취하고 역수를 취한 뒤(이때 부등호의 방향이 바뀐다) 적분하면

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x_n^2+x^2} \le \mathrm{I}(x_n,y_n) \le \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{y_n^2+x^2}.$$

이다. $c > 0$에 대하여 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{c^2+x^2} = \Big[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}$이므로

$$\frac{\pi}{2x_n} \le \mathrm{I}(x_0,y_0) \le \frac{\pi}{2y_n} \quad \text{모든} n.$$

가운데 항은 $n$에 대하여 일정하고, $x_n \to M$, $y_n \to M$, $M > 0$이므로 양쪽 경계는 모두 $\pi/(2M)$으로 수렴한다. 따라서

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2M}.$$

## 검산

- $x_0 = 2, y_0 = 1$로 두자. 반복하면 $(1.5, 1.41421)$, 그다음 $(1.45711, 1.45648)$을 얻고, 그다음에는 두 값이 유효숫자 다섯 자리까지 $M \approx 1.45679$로 일치한다. 따라서 $\pi/(2M) \approx 1.07826$이고, $\mathrm{I}(2,1)$을 수치적으로 계산해도 역시 1.07826이 나온다.
- $p = q$이면 $\mathrm{a}(p,p) = \mathrm{g}(p,p) = p$이므로 항등식은 자명하게 성립한다. $\mathrm{I}(M,M) = \pi/(2M)$이므로 답 $\pi/(2M)$은 이와 일치한다.
- 수렴은 매우 빠르다. 처음 몇 단계가 지나면 차이가 매번 대략 제곱이 되며, 이는 우리가 증명한 절반으로 줄어드는 것보다 훨씬 빠르다.

## 흔한 실수

- 귀납법에서 $y_n < x_n$(그리고 제곱근이 의미를 갖도록 $y_n > 0$)을 먼저 확립하지 않은 채 $y_{n+1} < x_{n+1}$을 사용하는 것.
- $t$에 대한 적분이 실수 전체에 걸쳐 있어서 $\mathrm{I}(a,g)$의 **두 배**가 된다는 것을 잊는 것. 두 개의 인수 2가 서로 약분되어야 한다.
- 아무런 정당화 없이 $\mathrm{I}(x_n, y_n) \to \mathrm{I}(M,M)$이라고 쓰는 것. 위의 조임 논증이 정직한 근거를 제공한다.

## STEP 너머

공통의 극한 $M$은 가우스(Gauss)의 산술–기하 평균이고, 적분 I는 **완전 타원적분**(complete elliptic integral)이다. 가우스는 1799년에 이 항등식을 발견했으며, 이 항등식은 타원적분을, 그리고 심지어 $\pi$ 자체를 놀라울 만큼 빠르게 계산하는 방법을 제공한다(가우스–르장드르(Gauss–Legendre) 알고리즘). 처음에 인용한 단조수렴정리(monotone convergence theorem)와, 극한과 적분의 순서를 바꿀 때 필요한 주의는 해석학 첫 강좌의 핵심 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 이 주제들을 제대로 만나기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.