풀이

STEP II 2024, 문제 7

순수수학 • 곡선 그리기

STEP II 2024, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 괄호는 원(circle)의 방정식이므로, C_1은 단지 두 원일 뿐이다. C_2의 경우 괄호를 전개하면 모든 것이 x^2+y^2과 x^2으로 정리되므로, 수평선으로 자르면 x^2에 대한 이차방정식(quadratic)을 얻는다. 그러면 교점의 개수를 세는 문제는 그 이차방정식의 양의 근(root)의 개수를 세는 문제로 바뀌고, 이는 판별식(discriminant), 근의 합, 근의 곱으로 함께 결정된다.

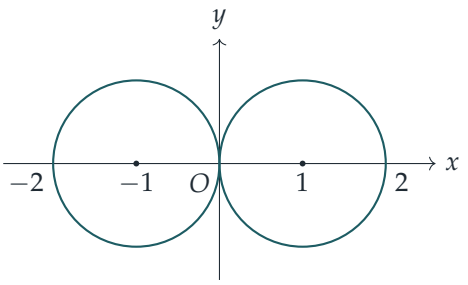
풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$A = y^2+(x-1)^2-1 = x^2+y^2-2x, \qquad B = y^2+(x+1)^2-1 = x^2+y^2+2x.$$

소문항 (i)

곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때와 정확히 같으므로, C_1은 원 $A=0$과 원 $B=0$의 합집합(union)이다. 이들은 중심이 각각 $(1,0)$과 $(-1,0)$이고 반지름이 1인 원이다. 두 원은 모두 원점을 지나며, 원점에서 서로 접한다(그 점에서의 공통 접선(tangent)은 y축이다). 가장 높은 점은 $(\pm 1, 1)$이고, 곡선은 $x=-2, 0, 2$에서 x축과 만난다.



소문항 (ii)(a)

$s = x^2 + y^2$이라 하면 A와 B는 각각 $s - 2x$와 $s + 2x$의 꼴이므로

$$AB = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2.$$

직선 $y = k$ 위에서 방정식 $AB = \frac{1}{16}$은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}(x^2 + k^2)^2 - 4x^2 &= \tfrac{1}{16}\\ x^4 + 2k^2x^2 + k^4 - 4x^2 - \tfrac{1}{16} &= 0\\ x^4 + 2(k^2 - 2)x^2 + \left(k^4 - \tfrac{1}{16}\right) &= 0,\end{aligned}$$

이로써 요구된 식을 얻는다.

이제 $u = x^2$으로 놓으면 다음을 얻는다.

$$u^2 + 2(k^2 - 2)u + \left(k^4 - \tfrac{1}{16}\right) = 0. \qquad (*)$$

근 $u > 0$ 하나는 두 교점 $x = \pm\sqrt{u}$를 주고, 근 $u = 0$은 한 점$(x = 0)$을 주며, 근 $u < 0$은 교점을 주지 않는다. 따라서 $(*)$의 근의 부호를 알아야 한다. 다음 세 양이 이를 알려 준다.

- 판별식의 4분의 1인 $(k^2 - 2)^2 - \left(k^4 - \frac{1}{16}\right) = \frac{65}{16} - 4k^2$. 이 값은 k가 $\frac{\sqrt{65}}{8}$보다 작은지, 같은지, 큰지에 따라 각각 양수, 0, 음수이다.
- 근의 합 $2(2 - k^2)$.
- 근의 곱 $k^4 - \frac{1}{16}$. 이 값은 $k > 0$일 때 $k - \frac{1}{2}$와 부호가 같다.

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{65}}{8} \approx 1.008$임에 주의하고, 또 근이 실수일 때는 언제나 $k^2 \le \frac{65}{64} < 2$이므로 근의 합이 양수임에 주의하자.

생각해 보기 근의 곱이 음수이면 판별식을 확인해야 할까?

그럴 필요 없다. 근의 곱이 음수이면 근은 반드시 실수이고(이때 판별식 $b^2 - 4ac$는 양수이다) 서로 부호가 반대이다. 이제 경우를 차례로 살펴본다.

- $0 < k < \frac{1}{2}$: 근의 곱이 음수이므로 양의 근이 정확히 하나 있다. **교점 2개.**
- $k = \frac{1}{2}$: $(*)$는 $u^2 - \frac{7}{2}u = 0$이 되므로 $u = 0$ 또는 $u = \frac{7}{2}$이고, $x = 0$과 $x = \pm\sqrt{7/2}$를 얻는다. **교점 3개.**
- $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{65}}{8}$: 판별식이 양수이므로 서로 다른 두 실근이 있다. 근의 곱과 합이 모두 양수이므로 두 근은 모두 양수이다. **교점 4개.**
- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$: 중근(repeated root) $u = 2 - k^2 = \frac{63}{64} > 0$이 있어 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$을 얻는다. **교점 2개.**
- $k > \frac{\sqrt{65}}{8}$: 실근이 없다. **교점 없음.**

소문항 (ii)(b)

(a)에 의해 직선 $y = k$는 $0 < k \leq \frac{\sqrt{65}}{8}$일 때 C_2와 만나고, 이보다 큰 k에 대해서는 만나지 않는다. C_2의 방정식에는 y가 y^2의 형태로만 나타나므로, 음수인 k에서 더 높은 점이 생기지는 않는다. 따라서 C_2 위의 y좌표의 최댓값은 $\frac{\sqrt{65}}{8}$이고, 이는 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$에서 얻어진다.

C_1 위에서 가장 높은 점은 두 원의 꼭대기인 $(\pm 1, 1)$이다. $\frac{\sqrt{63}}{8} < \frac{\sqrt{64}}{8} = 1$이므로 C_2의 가장 높은 점은 C_1의 가장 높은 점보다 y**축에 더 가깝다**(다만 $\frac{\sqrt{65}}{8} > 1$이므로 높이는 조금 더 높다).

소문항 (ii)(c)

$A < 0$이고 $B < 0$이라고 가정하자. $A < 0$에서 $2x > x^2 + y^2 \geq 0$이므로 $x > 0$이다. $B < 0$에서 $-2x > x^2 + y^2 \geq 0$이므로 $x < 0$이다. 이 둘은 서로 모순이므로 A와 B가 동시에 음수일 수는 없다. (기하적으로 말하면 두 열린 원판(open disc)은 겹치지 않는다.)

C_2 위에서는 $AB = \frac{1}{16} > 0$이므로 A와 B는 0이 아니고 부호가 같다. 둘 다 음수일 수는 없으므로 둘 다 양수이다. 그런데 $A > 0$은 $(x-1)^2 + y^2 > 1$을 뜻하므로, 그 점은 중심이 $(1, 0)$인 원의 엄밀히 바깥에 있다. 마찬가지로 $B > 0$이므로 그 점은 중심이 $(-1, 0)$인 원의 엄밀히 바깥에 있다. 따라서 C_2의 모든 점은 두 원의 바깥에 있다. 즉 C_2는 전체가 C_1의 바깥에 놓인다.

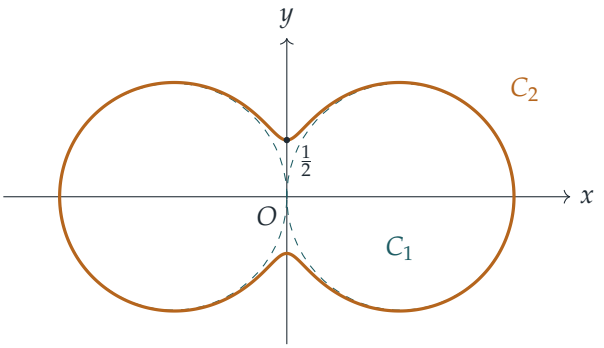
소문항 (ii)(d)

개형을 그릴 때 유용한 C_2의 특징은 다음과 같다.

- x^2과 y^2만 나타나므로 두 축에 대하여 대칭(symmetric)이다.
- $y = 0$일 때 $(*)$에서 $u = 2 + \frac{\sqrt{65}}{4}$이므로, C_2는 $x = \pm\sqrt{2 + \frac{\sqrt{65}}{4}} \approx \pm 2.004$에서 x축과 만난다. 이는 ± 2보다 바로 조금 바깥이다.

- $x = 0$일 때 $k^4 = \frac{1}{16}$이므로, C_2는 $(0, \pm\frac{1}{2})$에서 y축과 만난다.
- 가장 높은 점과 가장 낮은 점은 $\left(\pm\frac{\sqrt{63}}{8}, \pm\frac{\sqrt{65}}{8}\right) \approx (\pm 0.99, \pm 1.01)$이다.

(a)에서 센 교점의 개수가 모양을 보여 준다. $|y| < \frac{1}{2}$이면 교점은 두 개뿐이다(바깥쪽 양옆). $\frac{1}{2} < |y| < \frac{\sqrt{65}}{8}$이면 교점이 네 개이므로, 곡선은 두 봉우리 사이에서 $(0, \pm\frac{1}{2})$까지 움푹 내려온다. 따라서 C_2는 두 원을 모두 둘러싸는 하나의 닫힌 "땅콩" 모양이며, y축에서 잘록하게 들어가 있다.



(C_2를 극좌표(polar form)로 나타내면 $r^2 = 2\cos^2\theta + \sqrt{4\cos^4\theta + \frac{1}{16}}$이며, 위의 곡선은 이 식으로 그린 것이다.)

검산

- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$에서 판별식 $\frac{65}{16} - 4k^2$이 0이 되며, 이는 곡선의 꼭대기와 일치한다. 중근 $u = \frac{63}{64}$에서 $x^2 + y^2 = \frac{128}{64} = 2$이고 $4x^2 = \frac{63}{16}$이며, 실제로 $2^2 - \frac{63}{16} = \frac{1}{16}$이다.
- 점 $(0, \frac{1}{2})$: $A = B = \frac{1}{4}$이므로 $AB = \frac{1}{16}$이다.
- $k = 0.1, 0.49, 0.51, 1.0, 1.007, 1.01$에 대해 직선 $y = k$와 C_2의 교점을 컴퓨터로 세어 보면 각각 2, 2, 4, 4, 4, 0개이고, 수치 탐색으로 찾은 최대 높이는 $x \approx 0.9922 \approx \frac{\sqrt{63}}{8}$에서 $1.00778 \approx \frac{\sqrt{65}}{8}$이다.

흔한 실수

- $u = 0$이 두 점을 준다고 생각하는 것: $x = \pm\sqrt{0}$은 한 점뿐이며, 그래서 $k = \frac{1}{2}$일 때 교점은 4개가 아니라 3개이다.
- 개수를 셀 때 접하는 경우인 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$을 빠뜨리는 것.
- (c)에서 둘 다 음수인 경우를 배제하지 않고 "A와 B의 부호가 같다"는 결론에서 멈추는 것. 둘 다 음수인 경우를 배제하는 것이 바로 앞부분의 핵심이다.

STEP 너머

C_2는 곡선족 $(x^2+y^2)^2-4x^2=c$, 즉 함수 AB의 등위곡선(level curves)에 속한다. c가 커짐에 따라 곡선의 모양이 바뀐다. 처음에는 두 원 안쪽의 분리된 두 타원 모양 곡선이고($c<0$일 때), $c=0$에서는 8자 곡선(figure-of-eight)인 C_1이 되며, 그다음에는 하나의 땅콩 모양이 되는데, 이 땅콩의 오목한 부분은 $c\geq 4$가 되면 사라진다. 위상(topology)의 변화는 정확히 원점에 있는 AB의 임계점(critical point)의 높이에서 일어난다. 등위곡선이 임계점을 지나면서 어떻게 바뀌는지 추적하는 것이 모스 이론(Morse theory)의 출발점이며, 이와 밀접하게 관련된 카시니 타원(Cassini ovals)도 베르누이(Bernoulli)의 렘니스케이트(lemniscate)를 8자 곡선으로 가지면서 정확히 같은 방식으로 행동한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이와 같은 음함수 곡선(implicit curves)을 그리는 STEP 스타일의 곡선 개형 그리기 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.