풀이

STEP II 2024, 문제 6

순수수학 • 이항급수의 계수

> **STEP II 2024, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 소문항은 연속한 항의 비(ratio)를 바탕으로 돌아간다. 이항계수(binomial coefficient) $\binom{2n}{n}$와 이항급수(binomial series)의 계수는 둘 다 한 단계마다 인수가 하나씩 늘어나는 곱이므로, n번째 항을 $(n-1)$번째 항과 비교하면 짧은 점화식(recurrence)을 얻는다. 같은 점화식을 따르고 같은 값에서 시작하는 두 수열은 같다. 마지막 항등식은 $(1-x)^{-3/2}$를 $(1-x)^{-1/2}\times(1-x)^{-1}$로 쓰고 계수를 비교(comparing coefficients)하면 얻어진다. $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$를 곱하면 계수의 수열이 그 누적합(running totals)의 수열로 바뀌기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

$P(n)$을 명제 $T_n=\dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$이라 하자.

기저 단계(*base case*). $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0}=1=T_0$이므로 $P(0)$이 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n\geq 1$에 대하여 $P(n-1)$이 성립한다고 가정하자. $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$이고 $\binom{2n-2}{n-1}=\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$이므로, 나누면

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

을 얻는다. 그러면 점화식과 $P(n-1)$을 이용하여

$$\begin{aligned} T_n = \frac{2n-1}{2n} T_{n-1} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} \binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \frac{n}{2(2n-1)} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{4 \cdot 2^{2n-2}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

이고, 이것이 곧 $P(n)$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 $n = 0, 1, 2, \ldots$에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

소문항 (ii)

일반 지수에 대한 이항정리(binomial theorem)에 의하여, $(1-x)^{-1/2}$에서 x^r의 계수는

$$a_r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}(-1)^r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{r!}$$

이다. 분자의 r개 인수가 모두 음수이고, $(-x)^r$에서 나온 $(-1)^r$이 그 부호를 상쇄하기 때문이다. a_{r-1}에서 a_r로 넘어갈 때 분자에 인수 $\frac{2r-1}{2}$ 하나, 분모에 인수 r 하나가 추가되므로, $r \geq 1$에 대하여

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{(2r-1)/2}{r} = \frac{2r-1}{2r}, \qquad \text{즉,} \qquad a_r = \frac{2r-1}{2r} a_{r-1}$$

이다.

? **생각해 보기** 이 점화식에서 왜 곧바로 $a_r = T_r$을 얻는가?

두 수열은 모두 1에서 시작하고(상수항이 $a_0 = 1$이고 $T_0 = 1$이므로), $r-1$번째 항에서 r번째 항을 얻는 규칙도 같다. 한 줄짜리 귀납법으로 마무리된다. $a_{r-1} = T_{r-1}$이면 $a_r = \frac{2r-1}{2r} a_{r-1} = \frac{2r-1}{2r} T_{r-1} = T_r$이다. 따라서 모든 $r \geq 0$에 대하여 $a_r = T_r$이고, (i)에 의하여

$$a_r = \frac{1}{2^{2r}} \binom{2r}{r}$$

이다.

소문항 (iii)

같은 방법으로, $(1-x)^{-3/2}$에서 x^r의 계수는

$$b_r = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r+1}{2}}{r!}$$

이다. a_r과 b_r의 분자는 둘 다 연속한 r개의 반홀수(홀수의 절반)의 곱이다. b_r의 곱은 a_r의 첫 인수 $\frac{1}{2}$이 빠지고 끝에 인수 $\frac{2r+1}{2}$이 더해진 것이다. $r!$은 약분되므로

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{(2r+1)/2}{1/2} = 2r+1$$

이다. ($r=0$일 때는 두 곱이 모두 빈 곱이고 $b_0 = a_0 = 1$이므로 이 식과 일치한다.) 따라서

$$b_r = (2r+1)\,a_r = \frac{2r+1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

이다.

소문항 (iv)

$(1-x)^{-3/2} = (1-x)^{-1/2}(1-x)^{-1}$이고 $(1-x)^{-1} = \sum_{s\geq 0} x^s$이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} x^s\right)$$

이다. 우변에서 x^n 항은 각 $r = 0, 1, \ldots, n$에 대하여 첫 번째 괄호에서 $a_r x^r$을, 두 번째 괄호에서 x^{n-r}을 골라서 나온다. 이렇게 고른 각 경우의 계수는 $a_r \cdot 1$이므로, x^n의 계수는 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$이다. 양변에서 x^n의 계수를 비교하면

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r$$

이다. (ii)와 (iii)의 공식을 대입하면

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}$$

이 되어 증명이 끝난다. (이 풀이는 $n=0$일 때도 성립하며, 이때 양변은 모두 1이다.)

검산

- 작은 경우: $a_0, a_1, a_2, a_3 = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$이고, 이는 $\binom{2r}{r}/4^r = 1, \frac{2}{4}, \frac{6}{16}, \frac{20}{64}$과 일치한다.
- $n=3$일 때 (iv)의 좌변은 $\frac{7\cdot 20}{64} = \frac{35}{16}$이고, 우변은 $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{35}{16}$이다.
- 직접 전개하면 $(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \cdots$이고, $b_2 = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$이다.
- 정확한 분수로 계산하는 컴퓨터 검산으로 모든 $n \leq 29$에 대하여 (i)–(iv)를 확인하였다. $x = 0.3$에서 각 급수의 처음 30개 항을 더하면 1.19523과 1.70747이 나오며, 이는 $(0.7)^{-1/2}$, $(0.7)^{-3/2}$와 일치한다.

흔한 실수

- 이항계수의 부호 실수: $\binom{-1/2}{r}$은 부호가 번갈아 바뀌지만, $(-x)^r$에서 나온 인수 $(-1)^r$이 이를 상쇄하므로 모든 a_r과 b_r은 양수이다.
- 기저 단계를 빠뜨리거나, 점화식만으로 $a_r = T_r$이라고 주장하는 것: 시작값 $a_0 = T_0 = 1$도 일치해야 한다.

STEP 너머

거듭제곱급수(power series)에 $(1-x)^{-1}$을 곱하여 부분합(partial sums)을 만드는 것은 **생성함수**(*generating functions*)의 기본 도구이다. 생성함수는 수열에 관한 질문을 거듭제곱급수의 대수로 바꾸어 준다. 수 $\binom{2n}{n}/4^n$은 확률에서도 나타난다. 이는 공정한 동전을 $2n$번 던졌을 때 앞면이 정확히 n번 나올 확률이며, 스털링(Stirling) 공식에 의하면 n이 클 때 이 값은 $1/\sqrt{\pi n}$처럼 행동한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)에 이런 성격의 문제가 더 있고, Grimmett과 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수를 제대로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.