풀이

STEP II 2024, 문제 5

순수수학 • 치역과 디오판토스 방정식

> **STEP II 2024, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

$\mathbb{Z}$ 위에서 다항식(polynomial)의 치역(range)은 변수를 정수만큼 평행이동해도 바뀌지 않는다. 그래서 완전제곱식을 만들어(completing the square) (또는 완전세제곱식을 만들어) 각 함수를 가장 간단한 평행이동 꼴로 나타낸다. 그러면 두 치역이 만나는지 묻는 것은 두 정수 미지수에 대한 방정식이 해를 갖는지 묻는 것이 되고, 요령은 그 방정식을 **두 정수의 곱 = 작은 고정된 수** 꼴로 정리하는 것이다. 작은 수를 인수분해(factorising)하는 방법은 몇 가지뿐이므로 하나하나 확인할 수 있다.

풀이

소문항 (i)

완전제곱식을 만들면

$$\mathrm{f}_1(n) = (n+3)^2 + 2 = \mathrm{F}_1(n+3).$$

n이 $\mathbb{Z}$ 전체를 움직이면 $m = n+3$도 그러하다(모든 정수 m은 $n = m-3$에서 나온다). 따라서 f_1의 치역은 $\{m^2+2 : m \in \mathbb{Z}\}$이고, 이는 정확히 F_1의 치역이다. 이것이 보여야 할 것이었다.

소문항 (ii)

마찬가지로 $\mathrm{g}_1(n) = (n-1)^2 + 4$이므로, 같은 논법으로 g_1의 치역은 $\{k^2+4 : k \in \mathbb{Z}\}$이다. 소문항 (i)에 의해, 공통인 값이 있으려면 다음을 만족하는 정수 m, k가 있어야 한다.

$$m^2 + 2 = k^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 2.$$

그런데 $m-k$와 $m+k$의 차는 $2k$로 짝수이므로, 두 수의 홀짝성(parity)은 같다. 둘 다 홀수이면 곱도 홀수이므로 2가 될 수 없다. 둘 다 짝수이면 곱은 4의 배수이므로 역시 2가 될 수 없다. 따라서 그러한 m, k는 존재하지 않고, 두 치역의 교집합(intersection)은 공집합이다.

소문항 (iii)

완전제곱식을 만들면

$$\mathrm{f}_2(n) = (n-1)^2 - 7, \qquad \mathrm{g}_2(n) = (n-2)^2 - 2,$$

이므로 치역은 $\{m^2-7\}$과 $\{k^2-2\}$이다. 여기서 m, k는 $\mathbb{Z}$ 전체를 움직인다. 공통인 값이 있으려면 다음이 성립해야 한다.

$$m^2 - 7 = k^2 - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 5.$$

5는 소수(prime)이므로, 쌍 $(m-k,\, m+k)$는 $(1,5)$, $(5,1)$, $(-1,-5)$, $(-5,-1)$ 중 하나이다. 두 인수를 더하면 $2m = \pm 6$이고, 빼면 $2k = \pm 4$이므로, 모든 경우에 $m^2 = 9$, $k^2 = 4$이다. 공통인 값은

$$m^2 - 7 = 9 - 7 = 2 = 4 - 2 = k^2 - 2.$$

따라서 두 치역에 모두 속하는 정수는 $\boxed{2}$뿐이다. 검산해 보면 $\mathrm{f}_2(4) = \mathrm{f}_2(-2) = 2$이고 $\mathrm{g}_2(4) = \mathrm{g}_2(0) = 2$이다.

소문항 (iv)

p에 대해 완전제곱식을 만들면

$$p^2 + pq + q^2 = \left(p + \tfrac{1}{2}q\right)^2 + \tfrac{3}{4}q^2 \geq 0,$$

이다. 두 항 모두 제곱에 양의 상수를 곱한 것이기 때문이다. (등호는 $q = 0$이고 $p = 0$일 때만 성립한다.)

삼차식의 경우, f_3을 $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$과 비교하면 다음과 같다.

$$\mathrm{f}_3(n) = (n-1)^3 + 4n + 1 = (n-1)^3 + 4(n-1) + 5.$$

따라서 $m = n-1$로 두면(이번에도 m은 $\mathbb{Z}$ 전체를 움직인다), f_3의 치역은 $\{m^3 + 4m + 5\}$이고, g_3의 치역은 $\{k^3 + 4k - 6\}$이다. 공통인 값이 있으려면 다음을 만족하는 정수 m, k가 있어야 한다.

$$\begin{aligned} & m^3 + 4m + 5 = k^3 + 4k - 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k^3 - m^3) + 4(k-m) = 11 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k-m)\left(k^2 + km + m^2 + 4\right) = 11. \end{aligned}$$

생각해 보기 이 소문항의 처음에 나온 부등식은 이 방정식을 푸는 데 어떻게 도움이 되는가?

부등식에 $p = k, q = m$을 대입하면 $k^2 + km + m^2 + 4 \geq 4$이다. 특히 두 번째 인수는 양의 정수이므로 $k - m$도 양수여야 한다. 11은 소수이므로 가능한 경우는 두 가지뿐이다.

- $k - m = 11$이고 $k^2 + km + m^2 + 4 = 1$인 경우. 두 번째 인수는 적어도 4이므로 이는 불가능하다.
- $k - m = 1$이고 $k^2 + km + m^2 + 4 = 11$인 경우.

두 번째 경우에 $k = m + 1$을 대입하면

$$(m+1)^2 + m(m+1) + m^2 = 7$$
$$3m^2 + 3m + 1 = 7$$
$$m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1) = 0,$$

이므로 $m = 1$(이때 $k = 2$) 또는 $m = -2$(이때 $k = -1$)이다. 이에 대응하는 값은

$$m = 1 : \ 1 + 4 + 5 = 10, \qquad m = -2 : \ -8 - 8 + 5 = -11.$$

따라서 두 치역에 모두 속하는 정수는 $\boxed{10\text{과 } -11}$이다.

원래 변수로 돌아가 보면 $f_3(2) = 8 - 12 + 14 = 10$, $g_3(2) = 8 + 8 - 6 = 10$이고, 또 $f_3(-1) = -1 - 3 - 7 = -11$, $g_3(-1) = -1 - 4 - 6 = -11$이다. 흥미롭게도 두 공통값 모두 같은 입력 n에서 나온다.

검산

- 위에서 한 것처럼 다시 대입해 본다. f_2와 g_2는 둘 다 함숫값 2를 $n = 4$에서 취하고, f_3, g_3은 $n = 2$(값 10)와 $n = -1$(값 -11)에서 일치한다.
- 작은 값들을 나열해 보는 것은 소문항 (ii)를 빠르게 확인하는 방법이다. f_1은 $2, 3, 6, 11, 18, 27, \ldots$을, g_1은 $4, 5, 8, 13, 20, 29, \ldots$을 준다. 어느 목록에도 다른 목록의 수가 들어 있지 않다.
- $|n| \leq 3000$인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색하여, (i)의 두 치역이 같고, (ii)의 두 치역이 서로소(disjoint)이며, 공통인 값은 (iii)에서 2, (iv)에서 10, -11뿐임을 확인하였다.

흔한 실수

- $f(n) = g(n)$을 **같은** n에 대해 풀어서 공통인 값을 찾는 것. 두 입력은 서로 다를 수 있으므로, 서로 독립인 미지수 두 개가 필요하다. (iii)에서는 $f_2(n) = g_2(n)$이 우연히 올바른

답을 주지만, 방법은 틀렸다.

- (ii)에서 $(m-k)(m+k)=2$이면 $\{m-k, m+k\}=\{1,2\}$일 수밖에 없다고만 주장하고 음수인 인수 쌍을 잊는 것. 홀짝성 논법은 모든 경우를 한꺼번에 처리한다.
- (iv)에서 인수분해 11×1을 배제하는 것을 잊는 것. 이를 배제해 주는 것이 바로 부등식이다.

STEP 너머

$m^2-k^2=5$나 $k^3+4k=m^3+4m+11$처럼 정수해만을 따지는 방정식을 **디오판토스 방정식**(*Diophantine equation*)이라 한다. 한쪽 변을 인수분해하고 다른 쪽 변의 약수를 이용하는 것은 이러한 방정식을 푸는 가장 강력한 초등적 도구 중 하나이다. (ii)의 홀짝성 요령은 일반화된다. 정수가 두 제곱수의 차로 나타내어지는 것은 그 정수가 홀수이거나 4의 배수일 때, 그리고 그때뿐이다. 더 알고 싶다면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*이 대학 1학년 수준의 훌륭한 정수론(number theory) 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.