풀이

STEP II 2024, 문제 4

순수수학 • 벡터와 각의 이등분선

> **STEP II 2024, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것을 단위벡터(unit vector)로 줄여서 생각한다. $\hat{\mathbf{x}}$와 $\hat{\mathbf{y}}$를 각각 OX와 OY 방향의 단위벡터라 하면, $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$는 마름모(rhombus)의 대각선이고, 마름모의 대각선은 그 각을 이등분한다. 주어진 $\mathbf{b}$는 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$의 양수배일 뿐이므로, 각 이등분 벡터(bisecting vector)는 두 단위벡터의 합의 양수배이다. 이 덕분에 소문항 (ii)의 내적(dot product)들이 하나의 대칭적인 식으로 정리된다.

풀이

이 풀이 전체에서 각 XOY를 θ라 쓴다. O, X, Y가 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear) $0<\theta<\pi$이고, 따라서

$$-1<\cos\theta<1.$$

이다. 아래에서 두 엄격한 부등식이 모두 쓰인다.

소문항 (i)(a)

$\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$라 하면 $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\cos\theta$이다. 그러면

$$\mathbf{b}=|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}).$$

이것은 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$의 일차결합이므로 평면 XOY 위에 있다. 또한 영벡터가 아니다. $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{0}$이면 $\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}$가 되어 O, X, Y가 한 직선 위에 있게 되기 때문이다.

이제 각을 비교한다.

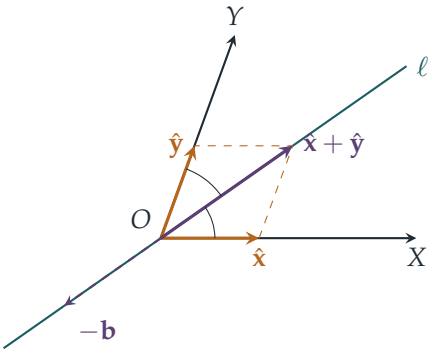
$$\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(1+\cos\theta)=\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}},$$

이므로, $\mathbf{b}$와 $\overrightarrow{OX}$ 사이의 각 α와 $\mathbf{b}$와 $\overrightarrow{OY}$ 사이의 각 β는

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|(1+\cos\theta)}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{b}|} = \cos\beta.$$

를 만족한다. 두 각 모두 코사인이 일대일(one-to-one)인 구간 $[0,\pi]$에 있으므로 $\alpha=\beta$이다. 또 $1+\cos\theta>0$이므로 $\cos\alpha>0$이고, 두 각 모두 $90°$보다 작다. 따라서 $\mathbf{b}$는 각 XOY의 이등분 벡터이다.

다른 이등분 벡터.



$\hat{\mathbf{x}}$와 $\hat{\mathbf{y}}$의 길이가 같으므로 이들이 만드는 평행사변형(parallelogram)은 마름모이고, 그 대각선 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$는 각 XOY를 똑같은 두 부분으로 나눈다. 평면 XOY에서 OX와 OY와 같은 각을 이루는 방향은 이 대각선을 품은 직선 ℓ을 따르는 두 방향뿐이다. 벡터를 ℓ에서 벗어나도록 회전시키면 한쪽 변에는 가까워지고 다른 쪽 변에서는 멀어지므로 두 각이 달라진다. ℓ 위에서 $\mathbf{b}$의 방향은 각 변과 $\frac{1}{2}\theta<90°$의 각을 이룬다. 반대 방향은 각 변과 $180°-\frac{1}{2}\theta>90°$의 각을 이루므로 제외된다. 따라서 모든 이등분 벡터는 ℓ을 따라 $\mathbf{b}$와 같은 방향을 가리키며, 이는 그것이 $\mathbf{b}$의 양수배라는 뜻이다.

같은 논증을 대수적으로 하면 다음과 같다. 평면 위의 임의의 벡터는 $\mathbf{v}=p\hat{\mathbf{x}}+q\hat{\mathbf{y}}$ 꼴이다. 두 각이 같다는 것은 $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}}$라는 뜻이고,

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}} = (p+q\cos\theta)-(p\cos\theta+q) = (p-q)(1-\cos\theta).$$

$\cos\theta\neq1$이므로 $p=q$일 수밖에 없고, 따라서 $\mathbf{v}=p(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$이다. 두 각이 예각이 되는 것은 $p>0$일 때뿐이다.

소문항 (i)(b)

점 B가 직선 XY 위에 있을 필요충분조건은 어떤 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{OB}=(1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}$인 것이다. 따라서

$$\lambda|\mathbf{y}|\,\mathbf{x}+\lambda|\mathbf{x}|\,\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}.$$

이어야 한다. $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$는 평행하지 않으므로 계수를 비교할 수 있다. 즉 $\lambda|\mathbf{y}| = 1-t$이고 $\lambda|\mathbf{x}| = t$이다. 두 식을 더하면

$$\lambda = \frac{1}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}, \qquad t = \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}.$$

를 얻는다. 그러면 $0 < t < 1$에 대하여 $\overrightarrow{XB} = t(\mathbf{y}-\mathbf{x})$, $\overrightarrow{BY} = (1-t)(\mathbf{y}-\mathbf{x})$이므로, B는 X와 Y 사이에 있고

$$XB : BY = t : (1-t) = |\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| = OX : OY.$$

이다. 이것이 각의 이등분선 정리(angle bisector theorem)이다. 즉 O에서 그은 이등분선은 XY를 이웃한 두 변의 비로 나눈다.

소문항 (i)(c)

여기서 $\overrightarrow{OB}$는 $\mathbf{b}$의 영이 아닌 실수배이므로, $OB \perp XY$는 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 0$을 뜻한다. $\mathbf{b} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$와 $\mathbf{y}-\mathbf{x} = |\mathbf{y}|\hat{\mathbf{y}} - |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$를 이용하면

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(|\mathbf{y}|\cos\theta + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| - |\mathbf{x}|\cos\theta)\\ &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|)(1+\cos\theta).\end{aligned}$$

이다. 그런데 $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| > 0$이고 $1+\cos\theta > 0$이므로, 이 값이 0이 되는 것은 $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$일 때뿐이다. 즉 $OX = OY$이고, 삼각형 XOY는 이등변삼각형(isosceles triangle)이다.

소문항 (ii)

$\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$를 각각 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 방향의 단위벡터라 하자. 네 점 중 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로, 특히 O, P, Q도 한 직선 위에 있지 않고, 따라서 소문항 (i)(a)를 각 각에 적용할 수 있다. 그러므로 선택한 이등분 벡터는 어떤 $\alpha, \beta, \gamma > 0$에 대하여

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{p}+\mathbf{q}), \qquad \mathbf{v} = \beta(\mathbf{q}+\mathbf{r}), \qquad \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{r}+\mathbf{p}),$$

꼴이어야 하며, 세 벡터 모두 영벡터가 아니다.

> **생각해 보기** 세 이등분 벡터는 임의의 양수배이다. 어떻게 세 각에 대해 한꺼번에 무언가를 말할 수 있을까?

배율이 양수이므로 내적의 부호를 바꿀 수 없다. 그리고 중요한 것은 부호뿐이다. 영벡터가 아닌 두 벡터 사이의 각은 내적이 양수, 0, 음수인지에 따라 각각 예각, 직각, 둔각이기 때문이다. $S = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$라 쓰자. $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 1$을 이용하면

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\beta\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \alpha\beta\,(1+S).$$

이다. 똑같은 방법으로 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}=1$과 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}=1$을 이용하면

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\beta\gamma\,(1+S),\qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}=\gamma\alpha\,(1+S).$$

이다. $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$가 모두 양수이므로, 세 내적은 모두 $1+S$와 부호가 같다. 따라서 $1+S>0$이면 세 각이 모두 예각, $1+S=0$이면 모두 직각, $1+S<0$이면 모두 둔각이다. ■

검산

- $\mathbf{x}=(3,0,0)$, $\mathbf{y}=(0,4,0)$으로 잡자. 그러면 $\mathbf{b}=(12,12,0)$이고, 이는 직각을 이등분한다. $\lambda=\frac{1}{7}$이면 $B=(\frac{12}{7},\frac{12}{7},0)$을 얻는데, 이 점은 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 위에 있고 $XB:BY=3:4$이다.
- 소문항 (ii)의 세 경우는 모두 실제로 일어난다. P, Q, R가 한 평면에서 서로 120°씩 벌어져 있으면 $S=-\frac{3}{2}$이고 이등분선들은 120°(둔각)로 만난다. $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$가 O를 중심으로 하는 정사면체(regular tetrahedron)의 세 꼭짓점을 가리키면 각 내적이 $-\frac{1}{3}$이므로 $S=-1$이고 세 각이 모두 직각이다. 거의 평행한 세 벡터는 예각을 준다.
- 두 소문항의 결과는 수천 개의 무작위 배치에 대해 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- $\cos\theta\neq\pm1$을 사용해야 한다는 사실을 잊는 것. (i)(c)의 인수 $1+\cos\theta$와 유일성 논증의 인수 $1-\cos\theta$가 0이 아닌 것은 오로지 점들이 한 직선 위에 있지 않기 때문이다.
- 소문항 (ii)에서 이등분 벡터를 $|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}$와 같은 특정한 벡터로 취급하는 것. 문제에서는 이등분 벡터를 자유롭게 고를 수 있게 했으므로, 이들이 그러한 벡터의 양수배라고 말하려면 소문항 (i)(a)를 인용해야 한다.

STEP 너머

벡터를 $|\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$로 쓰고 단위벡터로 다루는 습관은 선형대수학(linear algebra) 전반에서 큰 도움이 된다. (ii)의 항등식은 $\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$의 **그람 행렬**(Gram matrix)의 기하학의 작은 조각이다. 그람 행렬의 성분은 이 벡터들의 두 개씩 짝지은 내적이다. $|\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}|^2=3+2S\geq0$이라는 사실로부터 $S\geq-\frac{3}{2}$이므로, 둔각인 경우에는 한계가 있다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이러한 관점에서 내적, 사영(projection), 그람 행렬을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.