풀이

STEP II 2024, 문제 3

순수수학 • 반각 탄젠트 치환

> **STEP II 2024, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 일종의 사전을 만든다. 원 위에서 각 ϕ에 있는 점은, N에서 그 점을 지나는 직선이 y축과 만나는 높이 $\tan\frac{1}{2}\phi$에 대응한다. 이 대응을 거꾸로도 읽어서, 모든 높이 q가 원 위의 점 정확히 하나를 주도록 한다. 그러면 문제에 나오는 q의 각 함수는 $\frac{1}{2}\theta$에 관한 삼각함수 항등식이 되고, 각 θ에, 따라서 점에 무슨 일이 일어나는지 바로 읽어 낼 수 있다.

풀이

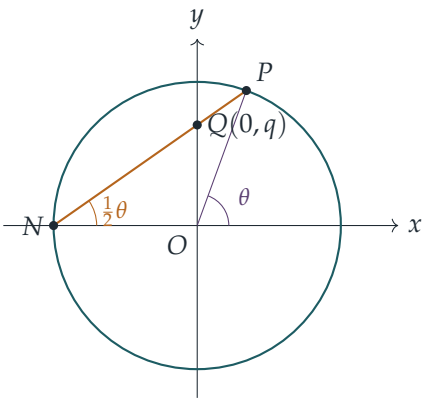
소문항 (i)

$P \neq N$이므로 $\cos\theta \neq -1$이고, 따라서 직선 NP는 수직선이 아니다. 그 기울기는

$$\frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - (-1)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta$$

이다. 여기서 배각 공식(double-angle formulas) $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$와 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$를 썼다($|\frac{1}{2}\theta| < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$이다). 이 직선은 $(-1,0)$을 지나므로 $y = (x+1)\tan\frac{1}{2}\theta$이고, $x = 0$을 대입하면 요구한 대로 $q = \tan\frac{1}{2}\theta$를 얻는다.

기하적으로 보면 이것은 원주각(angle at the circumference)이다. P가 중심에서 각 θ를 이루므로, 현 NP는 N에서 x축과 각 $\frac{1}{2}\theta$를 이룬다.



거꾸로 가기: 높이에서 점으로

앞으로 그 역(converse)이 계속 필요하다. 임의의 실수 q가 주어지면, N과 $(0,q)$를 지나는 직선은 $y = q(x+1)$이다. 이를 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$x^2 - 1 + q^2(x+1)^2 = 0 \iff (x+1)\left[(1+q^2)x - (1-q^2)\right] = 0$$

이다. 근 $x=-1$은 N이므로, 다른 교점은

$$\left(\frac{1-q^2}{1+q^2},\ \frac{2q}{1+q^2}\right)$$

이다. $q = \tan\frac{1}{2}\phi$이면 t 공식에 의해 이 점은 $(\cos\phi, \sin\phi)$이다. $\phi \mapsto \tan\frac{1}{2}\phi$는 $(-\pi,\pi)$에서 $\mathbb{R}$로의 전단사(bijection)이므로, 다음을 얻는다.

사전. 임의의 각 ϕ($(-\pi,\pi)$에 속하지 않아도 된다)에 대하여 $\tan\frac{1}{2}\phi = q$이면, N에서 $(0,q)$를 지나는 직선은 원과 $(\cos\phi, \sin\phi)$에서 다시 만난다.

ϕ를 $\phi \pm 2\pi$로 바꾸어도 $\tan\frac{1}{2}\phi$($\frac{1}{2}\phi$에 대하여 주기가 π이다)도, 점도 바뀌지 않으므로 이 사실은 모든 ϕ에 대하여 성립한다.

소문항 (ii)

(a) $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$이므로 덧셈정리(addition formula)에 의해

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\pi\right) = \frac{\tan\frac{1}{2}\theta + 1}{1 - \tan\frac{1}{2}\theta} = \frac{1+q}{1-q} = f_1(q)$$

이고, 이것은 요구한 대로 $\tan\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\pi\right)$이다. 조건 $q \neq 1$은 $\theta \neq \frac{1}{2}\pi$를 뜻하므로 분모는 0이 아니다.

(b) (a)에 의해 Q_1의 높이는 $\phi = \theta + \frac{1}{2}\pi$일 때의 $\tan\frac{1}{2}\phi$이다. 사전에 의해 $P_1 = \big(\cos(\theta +$

$\frac{1}{2}\pi), \sin(\theta + \frac{1}{2}\pi))$이다. 따라서

P_1은 P를 O를 중심으로 시계 반대 방향으로 회전(rotation)한 점이며, 회전각은 $\frac{1}{2}\pi$.

(제외된 값 $q = 1$은 $\theta = \frac{1}{2}\pi$이며, 이 회전에 의한 상이 바로 N이 되는 유일한 점이다.)

소문항 (iii)

(a) P_2는 각 $\theta + \frac{1}{3}\pi$에 있는 점이므로, 필요하면 각을 $(-\pi, \pi)$ 안으로 옮겨서(이렇게 해도 각의 절반의 tan 값은 바뀌지 않는다) 소문항 (i)을 적용하고 $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$을 쓰면

$$\mathrm{f}_2(q) = \tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{6}\pi\right) = \frac{q + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{q}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}q + 1}{\sqrt{3} - q}$$

이다. 조건 $q \neq \sqrt{3}$은 $\theta \neq \frac{2}{3}\pi$이고, 이는 정확히 P_2가 N이 되어 직선 NP_2가 존재하지 않게 되는 경우이다.

(b) 이번에는 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$을 차의 공식과 함께 쓴다.

$$\mathrm{f}_3(q) = \frac{1-q}{1+q} = \frac{\tan\frac{1}{4}\pi - \tan\frac{1}{2}\theta}{1 + \tan\frac{1}{4}\pi\tan\frac{1}{2}\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\theta\right) = \tan\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right).$$

사전에 의해 P_3은 각 $\frac{1}{2}\pi - \theta$에 있는 점, 즉 $(\sin\theta, \cos\theta)$이다. P의 좌표가 서로 바뀌었으므로

P_3은 P를 대칭이동(reflection)한 점이며, 대칭축은 직선 $y = x$.

(c)

? 생각해 보기 f_2^{-1}는 각에 어떤 일을 하는가?

(a)에서 f_2는 모든 각 ϕ에 대하여 $\tan\frac{1}{2}\phi$를 $\tan\frac{1}{2}(\phi + \frac{1}{3}\pi)$로 보낸다(계산에서 $\phi = \theta$를 쓴 적이 없다). 따라서 $\mathrm{f}_2\left(\tan\frac{1}{2}(\psi - \frac{1}{3}\pi)\right) = \tan\frac{1}{2}\psi$이고, f_2는 일대일(one-to-one)이므로($s = \mathrm{f}_2(q)$를 풀면 $s \neq -\sqrt{3}$일 때 유일한 $q = \frac{\sqrt{3}s-1}{s+\sqrt{3}}$을 얻는다)

$$\mathrm{f}_2^{-1}\left(\tan\tfrac{1}{2}\psi\right) = \tan\tfrac{1}{2}\left(\psi - \tfrac{1}{3}\pi\right)$$

이다. 즉 f_2^{-1}는 각을 $\frac{1}{3}\pi$만큼 되돌린다.

이제 세 단계를 거치며 각을 따라가 보자. $0 < q < 1$이므로 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$이다.

- f_2: 각 $\theta + \frac{1}{3}\pi \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$. 이때 $\mathrm{f}_2(q) > 0$이므로 f_3를 적용할 수 있다.
- f_3: 각 $\frac{1}{2}\pi - (\theta + \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{6}\pi - \theta \in (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$. 이 각은 $-\frac{2}{3}\pi$가 아니므로 높이는 $-\sqrt{3}$이 아니고, f_2^{-1}를 적용할 수 있다.

- f_2^{-1}: 각 $\frac{1}{6}\pi - \theta - \frac{1}{3}\pi = -\theta - \frac{1}{6}\pi$.

따라서 $\mathrm{f}_4(q) = \tan\frac{1}{2}\left(-\theta - \frac{1}{6}\pi\right)$이고, 사전에 의해 P_4는 각 $-\frac{1}{6}\pi - \theta$에 있는 점이다.

O를 지나고 각 α를 이루는 직선에 대한 대칭이동은 각 θ에 있는 점을 각 $2\alpha - \theta$에 있는 점으로 보낸다(대칭축이 두 방향을 이등분한다). 여기서 $2\alpha = -\frac{1}{6}\pi$이므로

P_4는 P를, O를 지나고 $-\frac{1}{12}\pi$의 각을 이루는 직선(양의 x축 기준)에 대하여 대칭이동한 점이다,

즉 대칭축은 직선 $y = -\tan\frac{1}{12}\pi\, x = -(2-\sqrt{3})\, x$이다.

이는 자연스럽다. $\frac{1}{3}\pi$만큼 회전하고, $y = x$에 대하여 대칭이동한 뒤, 다시 되돌려 회전하는 것은 대칭축 $y = x$를 $\frac{1}{3}\pi$만큼 되돌려 회전한 직선에 대한 대칭이동이고, $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}\pi = -\frac{1}{12}\pi$이다. 명시적으로 쓰면, $t = \tan\frac{1}{12}\pi = 2 - \sqrt{3}$으로 두어

$$\mathrm{f}_4(q) = -\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{12}\pi\right) = -\frac{q + 2 - \sqrt{3}}{1 - (2-\sqrt{3})q}$$

이다.

검산

- (iii)(b)에서 $\theta = \frac{1}{2}\pi$로 두면 $P = (0,1)$, $q = 1$, $\mathrm{f}_3(1) = 0$이므로 $Q_3 = O$이고 $P_3 = (1,0)$이며, 이는 실제로 $(0,1)$을 $y = x$에 대하여 대칭이동한 점이다.
- (c)에서 $q = \frac{1}{2}$이면 $\mathrm{f}_2(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1} \approx 1.5146$, 다음으로 $\mathrm{f}_3 \approx -0.2046$, 그다음 $\mathrm{f}_2^{-1} \approx -0.8868$이고, 이는 닫힌 식 $-\frac{\frac{1}{2}+2-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})} \approx -0.8868$과 일치한다.
- 무작위로 고른 점 P 100 000개에 대하여 컴퓨터로 확인한 결과, 위의 모든 관계($\frac{1}{2}\pi$만큼의 회전, f_2의 식, $y = x$에 대한 대칭이동, 각 $-\frac{1}{12}\pi$의 직선에 대한 대칭이동)가 반올림 오차 범위 안에서 성립하였다.

흔한 실수

- 각 $\theta + \frac{1}{2}\pi$가 $(-\pi, \pi)$ 밖에 있을 수 있다는 점을 알아차리지 못한 채 P_1이 각 $\theta + \frac{1}{2}\pi$에 있다고 쓰는 것. 이것이 문제가 되지 않는 이유는 오직 ϕ가 2π만큼 바뀔 때 $\tan\frac{1}{2}\phi$와 점이 모두 반복되기 때문이다.
- (c)에서 f_2^{-1}의 회전을 반대 방향으로 적용하는 것($\frac{1}{3}\pi$를 다시 더하는 것). 그러면 각 $\frac{1}{2}\pi - \theta$를 얻게 되어 P_4가 P_3과 같다는 잘못된 결론에 이른다.

STEP 너머

각 θ에 있는 점을 $q = \tan\frac{1}{2}\theta$로 보내는 사상은 원을 직선 위로 보내는 **입체사영**(*stereographic projection*)이고, 함수 f_1, f_2, f_3는 뫼비우스 변환(Möbius transformations) $q \mapsto \frac{aq+b}{cq+d}$이다. 원의 모든 회전과 대칭이동은 직선의 이러한 변환이 되고, 대칭변환을 합성하는 것은 2×2 행렬 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$을 곱하는 것에 대응한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 그림을 아름답게 전개하며, 이를 리만 구(Riemann sphere)로까지 확장한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.