풀이

STEP II 2024, 문제 2

순수수학 • 급수와 적분

> **STEP II 2024, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 모든 적분 $\int_0^1 x^m/(8+x^3)\,\mathrm{d}x$를 급수(series)로 바꾸어 주므로, 같은 재료로 만들어진 급수는 모두 이 적분들의 일차결합이 된다. (ii)나 (iii)의 급수를 계산하려면 괄호 안의 식을 $1/(3k+m+1)$ 꼴의 항들로 쪼갠 다음, 대응하는 피적분함수(integrand)들을 하나의 분수로 다시 합쳐서 적분하면 된다. 이렇게 얻은 적분을 다룰 수 있게 해 주는 것은 인수분해(factorisation) $8+x^3=(x+2)(x^2-2x+4)$이다.

풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$I_m=\int_0^1 \frac{x^m}{8+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

소문항 (i)

인수 8을 밖으로 빼내고, $|u|<1$일 때 성립하는 $(1+u)^{-1}=\sum_{k\geq 0}(-1)^k u^k$에 $u=x^3/8$을 대입하면

$$(8+x^3)^{-1}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x^3}{8}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{8^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\,x^{3k}.$$

이 전개는 $|x^3/8|<1$, 즉 $|x|<2$일 때 성립한다.

이제 양변에 x^m을 곱하고 $[0,1]$에서 항별로 적분한다. 이 구간은 전개가 성립하는 범위 안에

있다(그리고 문제에서 수렴(convergence)은 신경 쓰지 않아도 된다고 하였다).

$$I_m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \int_0^1 x^{3k+m}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}} \cdot \frac{1}{3k+m+1},$$

여기서 $n = 3k+m \geq 0$에 대하여 $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 1/(n+1)$임을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

세 분모 $3k+3, 3k+2, 3k+1$은 각각 $m = 2, 1, 0$일 때의 $3k+m+1$이다. 따라서 (i)에 의하여 주어진 급수는

$$I_2 - 2I_1 + 4I_0 = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 4}{8 + x^3}\,\mathrm{d}x.$$

? 생각해 보기 왜 $x^2 - 2x + 4$가 무언가와 약분되어야 할까?

$8 + x^3$이 두 세제곱의 합(sum of two cubes)이기 때문이다. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$에 $a = x$, $b = 2$를 대입하면

$$8 + x^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

따라서 피적분함수는 $\dfrac{1}{x+2}$로 간단해지고, 급수는 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$와 같다. 이것이 보여야 할 것이었다. 마지막으로

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \tfrac{3}{2}.$$

소문항 (iii)

먼저 괄호 안의 식을 k에 대한 부분분수(partial fractions)로 분해한다. $2k+1 = \alpha(3k+2) + \beta(3k+1)$로 놓자. $k = -\frac{1}{3}$을 대입하면 $\frac{1}{3} = \alpha$이고, $k = -\frac{2}{3}$을 대입하면 $-\frac{1}{3} = -\beta$, 즉 $\beta = \frac{1}{3}$이다. 그러므로

$$\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{24}{3k+1} + \frac{24}{3k+2},$$

이고, (i)에 의하여($m = 0$과 $m = 1$인 경우) 급수는

$$24I_0 + 24I_1 = \int_0^1 \frac{24(1+x)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}\,\mathrm{d}x.$$

와 같다. 이제 이 피적분함수를 부분분수로 분해한다.

$$\frac{1+x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4},$$

즉

$$1 + x = A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2).$$

$x = -2$를 대입하면 $-1 = 12A$이므로 $A = -\frac{1}{12}$이다. x^2의 계수를 비교하면 $0 = A + B$이므로 $B = \frac{1}{12}$이다. 상수항을 비교하면 $1 = 4A + 2C$이므로 $C = \frac{2}{3}$이다. (x의 계수로 확인하면 $-2A + 2B + C = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = 1$이다.) 양변에 24를 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{24(1+x)}{8+x^3} &= -\frac{2}{x+2} + \frac{2x+16}{x^2-2x+4} \\ &= -\frac{2}{x+2} + \frac{2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{18}{(x-1)^2+3},\end{aligned}$$

여기서는 이차식의 도함수 $2x - 2$를 떼어 내고, 남은 부분을 완전제곱식(completing the square)으로 정리하였다.

각 부분을 $[0, 1]$에서 적분한다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-2}{x+2}\,\mathrm{d}x &= -2\ln\tfrac{3}{2} = -2\ln 3 + 2\ln 2, \\ \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x &= \Big[\ln(x^2-2x+4)\Big]_0^1 = \ln\tfrac{3}{4} = \ln 3 - 2\ln 2, \\ \int_0^1 \frac{18}{(x-1)^2+3}\,\mathrm{d}x &= \frac{18}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1 \\ &= 6\sqrt{3}\Big(0 - \arctan(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\Big) = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \pi\sqrt{3}.\end{aligned}$$

마지막 줄에서는 $u = x - 1, c = \sqrt{3}$으로 놓고 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+c^2} = \frac{1}{c}\arctan\frac{u}{c}$를 이용하였다. 세 부분을 더하면 $\ln 2$ 항들이 소거되어

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\left(\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)}\right) = \pi\sqrt{3} - \ln 3,$$

이므로 $a = 3, b = 3$이다.

검산

- 이 급수들은 매우 빠르게 수렴하므로(각 항은 바로 앞 항의 8분의 1 이하이다) 처음 몇 항만으로도 좋은 검산이 된다. (ii)에서 급수의 처음 세 항을 더하면 $0.41667 - 0.01198 + 0.00084 \approx 0.40553$이고, $\ln\frac{3}{2} \approx 0.40547$과 비교된다.
- (iii)에서 $\pi\sqrt{3} - \ln 3 \approx 5.4414 - 1.0986 = 4.3428$이다. 컴퓨터로 급수의 처음 200개 항을 더하면 소수점 아래 열두 자리까지 일치한다. $k = 0$인 항 하나만으로도 $\frac{1}{8}\cdot 36 = 4.5$가 되어 크기가 맞다.

흔한 실수

- 전개식에서 $8^{-(k+1)}$ 대신 8^{-k}로 쓰는 것. 처음에 밖으로 빼낸 인수 $\frac{1}{8}$을 잃어버리면 안 된다.
- $\frac{1}{3k+3}$을 I_2가 아니라 I_3과 대응시키는 것. 분모는 $3k+m+1$이므로 m은 상수항보다 1 작다.
- $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$이 음수임을 잊어 $\pi\sqrt{3}$ 항의 부호를 틀리는 것.

STEP 너머

(i)에서처럼 합과 적분의 순서를 바꾸는 것은 여기서는 정당한데, 거듭제곱급수(power series)가 $[0,1]$에서 균등수렴(uniform convergence)하기 때문이다. 이러한 순서 교환이 언제 허용되는지는 대학 1학년 해석학(analysis)의 중심 주제이다. 같은 방법으로 (iii)에서와 똑같이 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$의 합을 구할 수 있다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 균등수렴과 항별 적분(term-by-term integration)을 꼼꼼하게 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.