풀이

STEP II 2024, 문제 10

역학 • 가속하는 쐐기 위의 마찰

STEP II 2024, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

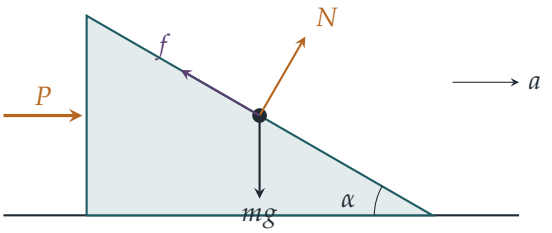
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

모든 것은 두 가지 관찰에 달려 있다. 첫째, 평면이 매끄러우므로(smooth) 계 전체(프리즘(prism)과 입자)에 작용하는 수평 방향 외력은 P뿐이다. 이로부터 공통 가속도가 곧바로 나온다. 둘째, 입자는 프리즘에 대해 움직이지 않으므로 입자도 정확히 같은 수평 가속도를 가진다. 따라서 입자 하나만 따로 놓고 경사면에 나란한 방향과 수직인 방향으로 힘을 분해하면 마찰력(friction)과 수직항력(normal reaction)이 바로 나온다. 그러면 (iii)의 부등식은 단지 "마찰력 $\leq \mu\times$ 수직항력"을 삼각함수의 덧셈정리(compound-angle formulae)로 정리한 것일 뿐이다.

풀이

입자는 질점으로, 프리즘은 매끄러운 수평면 위를 미끄러지는 강체(rigid body)로, 입자와 빗면 사이의 접촉은 마찰 계수(coefficient of friction)가 μ인 거친(rough) 접촉으로 모형화한다. 수직면을 왼쪽에 두어 빗면이 오른쪽으로 내려가도록 하자. 그러면 P는 프리즘을 오른쪽으로 민다.



입자에는 무게 mg, 빗면에 수직인 수직항력 N, 그리고 마찰력이 작용한다. 마찰력은 경사

면을 따라 **위쪽**으로 작용하는 부호 있는 양 f로 둔다(f가 음수로 나오면 마찰력은 실제로 경사면 아래쪽으로 작용한다). 마찰력의 크기는 $F = |f|$이다.

소문항 (i)

계가 평형(equilibrium) 상태, 즉 모든 것이 정지해 있다고 하자. 입자에 대해 경사면에 수직인 방향과 나란한 방향으로 힘을 분해하면

$$N = mg\cos\alpha, \qquad f = mg\sin\alpha.$$

입자가 미끄러지지 않으려면 $|f| \le \mu N$, 즉 $mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha$, 다시 말해 $\mu \ge \tan\alpha$이어야 한다(α가 예각이므로 $mg\cos\alpha > 0$으로 나눌 수 있다). 따라서 $\mu < \tan\alpha$이면 평형은 불가능하고, 입자는 반드시 미끄러진다.

소문항 (ii)

가속도. 프리즘과 입자를 하나로 묶어 생각한다. 평면은 매끄러우므로 연직 방향의 힘만 작용하고, 입자와 프리즘 사이의 힘은 내력(internal force)이다. 따라서 수평 방향 외력은 P뿐이고, 두 물체가 같은 가속도 a(수평, 오른쪽 방향)를 가지므로

$$P = (M+m)a, \qquad a = \frac{P}{M+m}.$$

입자에 대한 힘의 분해. 입자의 가속도는 수평 방향으로 a이다. 경사면 위쪽 방향 성분은 $-a\cos\alpha$이고(경사면은 왼쪽으로 올라가고 입자는 오른쪽으로 가속된다), 바깥쪽 법선 방향 성분은 $a\sin\alpha$이다.

> ? **생각해 보기** 왜 수평·연직 방향이 아니라 경사면에 나란한 방향과 수직인 방향으로 분해할까?

경사면에 나란한 방향으로는 f와 무게만 성분을 가지고, 수직인 방향으로는 N과 무게만 성분을 가진다. 그래서 각 방정식에 미지수가 하나씩만 들어 있어 연립방정식을 풀 필요가 없다. 그 대가로 가속도도 분해해야 하지만, 이는 쉽다.

경사면 위쪽 방향:

$$f - mg\sin\alpha = -ma\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad f = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

$a = P/(M+m)$을 대입하면

$$f = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha],$$

이므로 마찰력의 크기는

$$F = \frac{m}{M+m}\,|(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha|,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 절댓값은 정말로 필요하다. P가 작으면 마찰력은 경사면 위쪽으로 작용하지만, P가 크면 경사면이 입자를 충분히 세게 밀어붙이므로 입자가 위로 밀려 올라가지 않도록 마찰력이 경사면 아래쪽으로 작용해야 한다.

경사면에 수직인 방향(바깥쪽 법선):

$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad N = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\cos\alpha + P\sin\alpha].$$

$P > 0$이고 α가 예각이므로 이 값은 양수이다. 따라서 절댓값이 필요 없고, 입자는 접촉을 유지한다.

소문항 (iii)

입자가 프리즘에 대해 고정된 채로 있는 것은 마찰력이 필요한 만큼을 공급할 수 있을 때, 즉 $F \le \mu N$일 때와 정확히 같다. $G = (M+m)g$로 놓고 양의 인수 $m/(M+m)$을 약분하면

$$|G\sin\alpha - P\cos\alpha| \le \tan\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

$\cos\lambda > 0$을 곱하면, 이는 다음 두 부등식과 같다.

$$-\sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha) \;\le\; \cos\lambda\,(G\sin\alpha - P\cos\alpha) \;\le\; \sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

생각해 보기 이 부등식들이 어떻게 $\alpha \pm \lambda$의 탄젠트로 바뀔까?

G가 들어간 항은 한쪽으로, P가 들어간 항은 다른 쪽으로 모은다. 그러면 각 괄호는 덧셈정리의 전개식이 된다.

오른쪽 부등식(경사면 위쪽으로 작용하는 마찰력이 한계를 넘지 않아야 한다):

$$G(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) \le P(\cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda),$$
$$G\sin(\alpha-\lambda) \le P\cos(\alpha-\lambda).$$

$0 < \alpha - \lambda < \frac{1}{4}\pi$이므로 $\cos(\alpha-\lambda) > 0$이고, 따라서 이는 $P \ge G\tan(\alpha-\lambda)$와 같다.

왼쪽 부등식(경사면 아래쪽으로 작용하는 마찰력이 한계를 넘지 않아야 한다):

$$P(\cos\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda) \le G(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda),$$
$$P\cos(\alpha+\lambda) \le G\sin(\alpha+\lambda).$$

여기서 조건 $\lambda < \alpha < \frac{1}{4}\pi$를 쓴다. 이로부터 $0 < \alpha+\lambda < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos(\alpha+\lambda) > 0$이고, 양변을 나누어 $P \le G\tan(\alpha+\lambda)$를 얻는다.

두 부등식이 모두 성립해야 하므로

$$(M+m)g\tan(\alpha-\lambda) \le P \le (M+m)g\tan(\alpha+\lambda),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $P = 0$이면 하한은 $0 \geq G\tan(\alpha - \lambda)$를 뜻하는데, $\lambda < \alpha$이므로 이는 거짓이다. 이는 $\mu = \tan\lambda < \tan\alpha$이므로 소문항 (i)과 일치한다.
- $P = G\tan\alpha$에서는 $f = 0$이 된다. 이때의 미는 힘은 매끄러운 면 위의 입자가 정지해 있기에 꼭 알맞은 값이며, 이는 잘 알려진 "가속하는 쐐기" 결과 $a = g\tan\alpha$이다. 이 값은 당연히 구간 안에 있다.
- 수치로 확인해 보자. $M = 3$, $m = 1$, $g = 9.8$, $\alpha = 30°$, $\lambda = 10°$이면 허용 범위는 $14.27 \leq P \leq 32.89$(뉴턴)이다. $P = 20$일 때 공식으로 $F \approx 0.570$, $N \approx 10.99$를 얻으므로 $F/N \approx 0.052 < \tan 10° \approx 0.176$이다. 무작위로 고른 수천 가지 경우에 대해 컴퓨터로 입자의 운동방정식을 직접 풀어 보면 두 공식 및 구간과 모두 일치한다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $N = mg\cos\alpha$로 놓는 것. 경사면이 가속하고 있으므로 수직항력은 정지 상태의 값이 아니다.
- 절댓값을 빠뜨려 P의 하한만 구하는 것. 상한은 마찰력이 경사면 **아래쪽**으로 작용하는 경우에서 나온다.
- $\cos(\alpha + \lambda)$가 양수임을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것. 바로 여기서 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$가 쓰인다.

STEP 너머

이 문제를 더 깔끔하게 보는 방법은 가속도 a로 가속하는 프리즘의 좌표계에서 생각하는 것이다. 그 좌표계에서 입자는 뒤쪽으로 추가적인 "가상력(fictitious force)" ma를 받고, 문제는 유효 중력이 각 $\arctan(a/g)$만큼 기울어진 거친 경사면 위의 평범한 정역학 문제가 된다. 그러면 조건은 이 기울기가 α로부터 마찰각(angle of friction) λ 이내에 있어야 한다는 것이 되며, 이것이 바로 앞에서 구한 구간이다. 비관성계(non-inertial frame)와 가상력은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.