풀이

STEP II 2024, 문제 1

순수수학 • 연속한 정수의 합

> **STEP II 2024, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2024년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

핵심 아이디어

양변은 모두 등차급수(arithmetic series)이므로, 각각 (항의 개수) × (항의 평균)으로 나타낼 수 있다. 두 값을 같다고 놓으면 n, k, c 사이의 이차(quadratic) 관계식 하나를 얻고, 문제의 나머지 부분은 이 관계식에 대한 정수론(number theory)이다. k를 고정하면 c에 대해 쉽게 풀 수 있고, 홀짝성(parity)이나 나머지(remainder)를 보면 c가 언제 양의 정수가 되는지 판단할 수 있다. 반대로 $c = 1$로 고정하면 펠(Pell) 형 방정식을 얻으며, (iv)(b)의 사상은 이미 아는 해로부터 새로운 해를 만들어 내는 표준적인 방법이다.

풀이

소문항 (i)

c부터 시작하는 $n+k$개의 정수는 $c, c+1, \ldots, c+n+k-1$이다. 이들의 합은

$$S_1 = (n+k)c + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

그다음 n개의 정수는 $c+n+k, \ldots, c+2n+k-1$이고, 그 합은

$$S_2 = n(c+n+k) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

두 합을 각각 두 배하여 전개하면

$$2S_1 = 2nc + 2kc + n^2 + 2nk + k^2 - n - k,$$
$$2S_2 = 2nc + 2n^2 + 2nk + n^2 - n.$$

빼면 $2S_1 - 2S_2 = 2kc + k^2 - k - 2n^2$이다. 따라서

$$S_1 = S_2 \iff 2kc + k^2 - k = 2n^2 \iff 2n^2 + k = 2ck + k^2.$$

모든 단계는 거꾸로 되돌릴 수 있으므로(전개하고, 두 배하고, 정리했을 뿐이다), 두 합이 같을 필요충분조건은 $2n^2 + k = 2ck + k^2$이다. 이로써 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

(a) $k = 1$이면 조건은 $2n^2 + 1 = 2c + 1$이므로 $c = n^2$이다. 이는 모든 n에 대해 양의 정수이므로, **모든** 양의 정수 n이 가능하고 이때 $c = n^2$이다. (예를 들어 $n = 2$이면 $4 + 5 + 6 = 7 + 8$이다.)

(b) $k = 2$이면 조건은 $2n^2 + 2 = 4c + 4$, 즉

$$n^2 = 2c + 1, \qquad c = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

c가 정수이려면 n^2이 홀수여야 하므로 n이 홀수여야 한다. c가 양수이려면 $n^2 > 1$이어야 하므로 $n = 1$은 제외된다. 역으로 $n \geq 3$인 모든 홀수 n은 양의 정수 c를 준다. 따라서 가능한 값은

$$n \in \{3, 5, 7, \dots\}, \qquad c = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1).$$

$n = 3, c = 4$인 경우가 등식 $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 9 + 10 + 11$이다.

소문항 (iii)

$k = 4$이면 조건은 $2n^2 + 4 = 8c + 16$, 즉

$$n^2 = 4c + 6 = 4(c + 1) + 2.$$

따라서 n^2을 4로 나눈 나머지가 2여야 한다. 그러나 제곱수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 1이다. $n = 2m$이면 $n^2 = 4m^2$이고, $n = 2m + 1$이면 $n^2 = 4(m^2 + m) + 1$이기 때문이다. 그러므로 해가 없다.

소문항 (iv)

$c = 1$이면 조건은 $2n^2 + k = 2k + k^2$, 즉

$$2n^2 = k(k + 1). \qquad (*)$$

다시 말해 $n^2 = \frac{1}{2}k(k+1)$이다. 즉 완전제곱수(perfect square)이기도 한 삼각수(triangular number)를 찾는 문제이다.

(a) 작은 k를 대입해 보자. $k = 1$이면 $2n^2 = 2$이므로 $n = 1$이다. $k = 2, \dots, 7$이면 $k(k+1)/2 = 3, 6, 10, 15, 21, 28$이고, 이 중 제곱수는 없다. $k = 8$이면 $2n^2 = 72$이므로 $n = 6$이다. 따라서 두 가지 경우는

$$k = 1,\ n = 1 \qquad \text{그리고} \qquad k = 8,\ n = 6.$$

(두 번째 경우를 확인하면 $1+2+\cdots+14=105$이고 $15+16+\cdots+20=105$이다.)

(b) $2N^2=K^2+K$라 하자. $N'=3N+2K+1$, $K'=4N+3K+1$로 놓으면

$$\begin{aligned}2N'^2&=2(9N^2+4K^2+1+12NK+6N+4K)\\&=18N^2+8K^2+24NK+12N+8K+2,\\K'^2+K'&=(16N^2+9K^2+1+24NK+8N+6K)+(4N+3K+1)\\&=16N^2+9K^2+24NK+12N+9K+2.\end{aligned}$$

빼면

$$2N'^2-(K'^2+K')=2N^2-K^2-K=0,$$

이고, 마지막 등호에서 가정을 사용하였다. 따라서 $2N'^2=K'(K'+1)$이다. N과 K가 양의 정수이므로 N'과 K'도 양의 정수이고, $(*)$와 소문항 (i)에 의해 N'은 n의 가능한 값이며 이에 대응하는 k는 $k=K'$이다.

? **생각해 보기** 이 이상한 공식들은 어디에서 나온 것일까?

$(*)$에 4를 곱하고 1을 더하면 $(2k+1)^2-8n^2=1$이 된다. $x=2k+1$, $y=n$으로 두면 이는 펠 방정식(Pell equation) $x^2-8y^2=1$이고, 그 해들은 $x+y\sqrt{8}$에 가장 작은 해 $3+\sqrt{8}$을 곱하여 만들어진다. $(x+y\sqrt{8})(3+\sqrt{8})=(3x+8y)+(x+3y)\sqrt{8}$로 쓰고 이를 다시 k와 n으로 옮기면 정확히 $N'=3N+2K+1$과 $2K'+1=3(2K+1)+8N$, 즉 $K'=4N+3K+1$을 얻는다.

(c) 이 사상을 $(N,K)=(1,1)$에 적용하면 $N'=6$, $K'=8$이 나오는데, 이는 (a)의 두 번째 해일 뿐이다. $(N,K)=(6,8)$에 적용하면

$$N'=18+16+1=35,\qquad K'=24+24+1=49,$$

이고, 다시 $(35,49)$에 적용하면

$$N'=105+98+1=204,\qquad K'=140+147+1=288.$$

따라서 새로운 두 해는

$$k=49,\ n=35\qquad \text{그리고}\qquad k=288,\ n=204.$$

실제로 $2\cdot35^2=2450=49\cdot50$이고 $2\cdot204^2=83232=288\cdot289$이다.

검산

- 처음 예시는 $n=3, k=2, c=4$이다. $2\cdot9+2=20=2\cdot4\cdot2+4$이므로 (i)의 관계식을 만족하고, $c=\frac{1}{2}(9-1)$이므로 (ii)(b)와도 맞는다.

- $n, k < 40$과 $c < 200$의 모든 경우를 컴퓨터로 탐색한 결과, 두 합이 같은 것은 정확히 $2n^2 + k = 2ck + k^2$일 때임을 확인하였다. 또 $c = 1$, $n, k < 400$으로 탐색한 결과 $(k, n) = (1, 1), (8, 6), (49, 35), (288, 204)$만 나왔으며, 이는 (iv)와 일치한다.
- (iv)(b)에서 (N, K)에서 (N', K')으로 가는 단계는 **임의의** N, K에 대해 $2N^2 - K^2 - K$의 값을 보존한다는 점에 주목하자. 이는 작은 수로 계산을 빠르게 검산하는 방법이 된다. 예를 들어 $N = K = 0$이면 $N' = K' = 1$이고 두 값 모두 0이다.

흔한 실수

- (ii)(b)에서 $n = 1$을 포함하는 것. 이때 $c = 0$이 되는데, 이는 양의 정수가 아니다.
- (i)에서 두 번째 묶음이 시작하는 위치를 잘못 세는 것. 두 번째 묶음은 $c + n + k + 1$이 아니라 $c + n + k$에서 시작한다.
- (iv)(c)에서 $k = 8$, $n = 6$을 다시 답으로 쓰는 것. 이는 사상의 첫 번째 출력이지만 이미 (a)에서 구한 해이다.

STEP 너머

방정식 $x^2 - 8y^2 = 1$은 펠 방정식이며, 제곱수가 아닌 임의의 d에 대해 $x^2 - dy^2 = 1$의 해는 모두 하나의 기본해(fundamental solution)의 거듭제곱에서, 즉 $x + y\sqrt{d}$ 꼴의 수의 곱셈을 통해 얻어진다. 이것은 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 같은 환(ring)의 단원(unit)을 처음으로 엿보는 것으로, 대수적 정수론(algebraic number theory)의 핵심 주제이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 연분수(continued fraction)를 이용하여 펠 방정식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.