풀이

STEP III 2023, 문제 9

역학 • 두 입자를 잇는 줄의 운동

> **STEP III 2023, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

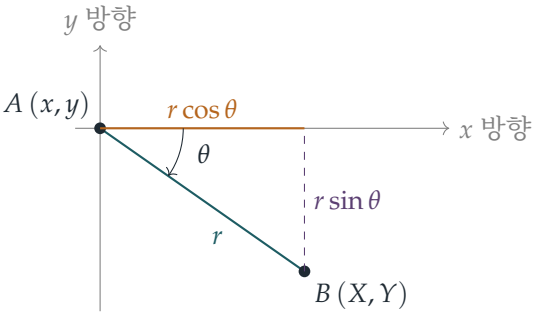
계를 A의 위치와 실의 방향 θ로 나타낸다. 장력(tension)은 실을 따라서만 작용하므로, 각 입자의 가속도에는 실에 수직인 성분이 없다. 두 입자의 수직 방향 가속도를 비교하면 $\ddot{\theta} = 0$이 될 수밖에 없다. 즉 실은 일정한 비율로 회전한다. 그다음에는 운동량 보존(conservation of momentum)으로 마무리하면 된다.

풀이

전체적으로 입자들은 매끄러운 수평면 위에서 움직이고, 실은 가볍고 늘어나지 않으며(inextensible), (가정해도 되듯이) 계속 팽팽하게(taut) 유지되므로 언제나 $AB = r$이다.

소문항 (i)

벡터 $\overrightarrow{AB}$의 길이는 r이다. θ는 양의 x축으로부터 **시계 방향**으로 잰 각이므로, 그림에서처럼 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$일 때 이 벡터는 x 방향보다 아래쪽을 향한다.



A에서 B로 가려면 x 방향으로 $r\cos\theta$만큼, y의 **음의** 방향으로 $r\sin\theta$만큼 이동하므로

$$X = x + r\cos\theta, \qquad Y = y - r\sin\theta.$$

$(\cos\theta, -\sin\theta)$는 x축으로부터 시계 방향으로 각 θ를 이루는 단위벡터이므로, 같은 식이 모든 θ에 대해 성립한다.

소문항 (ii)

t에 대해 미분하면(r은 상수이고 θ는 t의 함수이다)

$$\dot{X} = \dot{x} - r\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{Y} = \dot{y} - r\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\ddot{X} = \ddot{x} - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \qquad \ddot{Y} = \ddot{y} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

소문항 (iii)

장력 T는 A를 단위벡터 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 방향을 따라 B 쪽으로 당기고, B를 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 방향을 따라 A 쪽으로 당긴다. 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)에 의해

$$m\ddot{x} = T\cos\theta, \quad m\ddot{y} = -T\sin\theta, \qquad M\ddot{X} = -T\cos\theta, \quad M\ddot{Y} = T\sin\theta.$$

따라서

$$m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = T\cos\theta\sin\theta - T\sin\theta\cos\theta = 0,$$

이고, 똑같은 방법으로 $M(\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) = 0$이다. 각각 m과 M으로 나누면 요구하는 두 결과를 얻는다. (기하학적으로 보면, $(\sin\theta, \cos\theta)$는 실에 수직이고 두 입자 모두 그 방향으로는 가속하지 않는다.)

> **생각해 보기** "수직 방향 가속도가 없다"는 두 식이 있다. 이 식들이 어떻게 θ에 대해 무언가를 알려 주는가?

두 번째 식에서 첫 번째 식을 빼고, $\ddot{X} - \ddot{x}$와 $\ddot{Y} - \ddot{y}$에 소문항 (ii)의 식을 대입한다.

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{X} - \ddot{x})\sin\theta + (\ddot{Y} - \ddot{y})\cos\theta \\ &= (-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta + (-r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta)\cos\theta \\ &= -r\ddot{\theta}\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

$r \neq 0$이므로 $\ddot{\theta} = 0$이고, 따라서 $\dot{\theta}$는 상수이다.

이 상수를 구하기 위해 초기 조건을 이용한다. $t = 0$일 때 B는 A에 대해 $(r, 0)$에 있으므로 $\theta(0) = 0$이다. 또 $\dot{y}(0) = u$이고 $\dot{Y}(0) = 0$이므로, 소문항 (ii)의 $\dot{Y}$에 대한 식에서

$$0 = u - r\dot{\theta}(0)\cos 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(0) = \frac{u}{r}.$$

($\dot{X}$에 대한 식도 이와 모순되지 않는다: $0 = 0 - r\dot{\theta}(0)\sin 0$.) 따라서 모든 t에 대해 $\dot{\theta} = u/r$이고, $\theta(0) = 0$을 이용해 적분하면

$$\theta = \frac{ut}{r},$$

이므로 요구하는 결과가 성립한다.

소문항 (iv)

소문항 (iii)의 운동 방정식을 두 개씩 더하면

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = T\cos\theta - T\cos\theta = 0, \qquad m\ddot{y} + M\ddot{Y} = -T\sin\theta + T\sin\theta = 0.$$

이것이 운동량 보존이다. 장력은 계의 내력이기 때문이다. 두 번째 식을 한 번 적분하면 $m\dot{y} + M\dot{Y}$는 상수이고, 그 값은 초깃값 $mu + M\cdot 0 = mu$와 같다. $y(0) = Y(0) = 0$을 이용해 한 번 더 적분하면

$$my + MY = mut.$$

소문항 (v)

소문항 (i)의 $Y = y - r\sin\theta$와 소문항 (iii)의 $\theta = ut/r$를 대입하면

$$my + M\left(y - r\sin\frac{ut}{r}\right) = mut \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{1}{m+M}\left(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\right),$$

이고, 이것이 요구하는 결과이다.

소문항 (vi)

소문항 (v)의 결과를 미분하면

$$\dot{y} = \frac{1}{m+M}\left(mu + Mu\cos\frac{ut}{r}\right) = \frac{u}{m+M}\left(m + M\cos\frac{ut}{r}\right).$$

실이 반 바퀴 회전한 시각 $t = \pi r/u$에서 $\cos(ut/r) = -1$이고

$$\dot{y} = \frac{u(m-M)}{m+M},$$

이며, 이 값은 $M > m$일 때 ($u > 0$이므로) 음수이다. 따라서 그 순간 A의 속도는 음의 y 성분을 가지며, 연속성(continuity)에 의해 그 시각 근처의 어떤 시간 구간에서도 그렇다.

검산

- $t = 0$일 때 소문항 (v)의 식은 $\dot{y} = u(m+M)/(m+M) = u$를 주므로, A의 초기 속도와 일치한다.

- x 방향에 같은 방법을 적용하면 $mx + MX = Mr$이므로 $x = \dfrac{Mr}{m+M}(1-\cos\theta)$이다. 소문항 (v)와 함께 보면, 질량중심(centre of mass)은 y 방향으로 속력 $mu/(m+M)$으로 직선 운동을 하고, 두 입자는 각속도(angular speed) u/r로 그 둘레를 원운동한다. 이는 익숙한 그림이다. 이때 장력은 상수 $\dfrac{mM}{m+M}\dfrac{u^2}{r} > 0$이므로, 실은 실제로 팽팽하게 유지된다.
- $M \to \infty$이면 B는 고정되어 있고, 소문항 (v)는 $y = r\sin(ut/r)$를 준다. 즉 A는 B를 중심으로 반지름 r인 원을 따라 움직이며, 이는 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- $m = 1, M = 3, u = r = 1$로 두고 두 입자를 매우 단단한 용수철로 연결해 컴퓨터 시뮬레이션을 한 결과, $t = \pi$에서 $y \approx 0.7854$, $\dot{y} \approx -0.5000$을 얻었다. 이는 $\frac{\pi}{4}$ 및 $\frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$와 일치한다.

흔한 실수

- 시계 방향 규약에서 오는 부호 실수: $Y = y - r\sin\theta$이므로 $\dot{Y}$에는 $+$가 아니라 $-r\dot{\theta}\cos\theta$가 들어간다.
- 상수 u/r의 근거를 밝히지 않는 것: 이 값은 A의 속력만으로 나오는 것이 아니라 $\dot{Y}(0) = 0$에서 나온다.
- 소문항 (vi)에서 구체적인 시각을 제시하지 않고 "결국에는" $\dot{y} < 0$이라고 주장하는 것: $t = \pi r/u$가 확실한 시각을 준다.

STEP 너머

이것은 가장 단순한 형태의 이체 문제(two-body problem)이다. 운동은 질량중심의 등속 운동과, 환산질량(reduced mass) $mM/(m+M)$이 지배하는 질량중심에 대한 상대 운동으로 나뉜다. 같은 분해가 행성의 궤도와 이원자 분자(diatomic molecule)의 진동의 바탕에 깔려 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심 좌표와 환산질량을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.