풀이

STEP III 2023, 문제 8

순수수학 • 구간별로 정의된 미분방정식

> **STEP III 2023, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

절댓값(modulus) 때문에 이 방정식은 비선형(non-linear)이 되지만, 그 정도는 약하다. y'의 부호가 일정하게 유지되는 구간에서는 $|y'|$이 그냥 y' 또는 $-y'$이므로, 방정식은 평범한 상수계수(constant-coefficient) 방정식이 된다. 따라서 y'이 0이 될 때까지 해를 따라간 다음, 다른 쪽 선형 방정식으로 바꾸고, 이음매에서 y와 y'의 값을 맞춘다. 소문항 (iv)는 수고를 덜어 주는 요령이다. 해를 $x \mapsto c - x$로 반사(reflection)하면 일계도함수 항의 부호가 바뀌는데, 이것이 바로 두 선형 방정식 사이의 전환이다.

풀이

소문항 (i)

$\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-x}$이면

$$\mathrm{f}'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$$\mathrm{f}'' + 2\mathrm{f}' + \mathrm{f} = [(x-2) + 2(1-x) + x]\mathrm{e}^{-x} = 0$$

이다. 또한 $\mathrm{f}(0) = 0$이고 $\mathrm{f}'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^{0} = 1$이므로 조건을 만족한다.

$\mathrm{e}^{-x} > 0$이므로 $\mathrm{f}'(x)$의 부호는 $1 - x$의 부호와 같고, 이는 $x \leq 1$일 때 ≥ 0이다. 그러므로 $x \leq 1$에서 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$이다.

소문항 (ii)

$x \leq 1$에서 $f' \geq 0$이므로 $|f'| = f'$이고, (ii)의 방정식은 (i)의 방정식과 같다. 따라서 f는 $x \leq 1$에서 새 방정식과 초기 조건을 만족하며,

$$g_1(x) = xe^{-x}.$$

이음매에서 $g_1(1) = e^{-1}$이고 $g_1'(1) = 0$이다. 연속 미분가능성(continuous differentiability)에 의해 g_2는 같은 값에서 출발해야 한다. 즉 $g_2(1) = e^{-1}$, $g_2'(1) = 0$이다.

> **생각해 보기** $x = 1$을 막 지난 곳에서 y'의 부호는 무엇인가?

$x = 1$에서 방정식은 $y'' = -2|y'| - y = -e^{-1} < 0$을 주므로, y'은 0을 지나며 감소하고 $x = 1$ 바로 다음에서는 음수이다. 그곳에서 $|y'| = -y'$이고 방정식은

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

이 된다. 특성방정식(auxiliary equation) $m^2 - 2m + 1 = 0$은 중근(repeated root) $m = 1$을 가지므로 $g_2(x) = (A + Bx)e^x$이고 $g_2'(x) = (A + B + Bx)e^x$이다. $x = 1$에서의 조건으로부터

$$(A + B)e = e^{-1}, \qquad (A + 2B)e = 0,$$

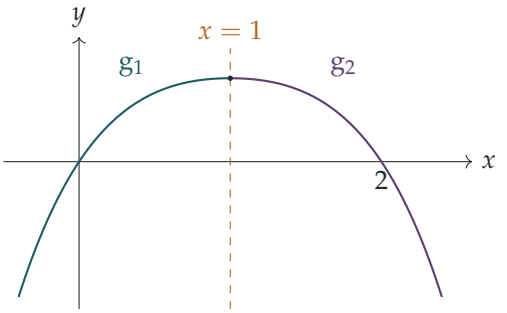
이므로 $B = -e^{-2}$, $A = 2e^{-2}$이다. 그러므로

$$g_2(x) = (2 - x)e^{x-2}.$$

이것이 가정 $y' \leq 0$과 모순되지 않는지 확인해야 한다. 모든 $x \geq 1$에 대하여 $g_2'(x) = (1 - x)e^{x-2} \leq 0$이다. 따라서 $x \geq 1$ 전체에서 $|g_2'| = -g_2'$이고, g_2는 실제로 $x \geq 1$ 전체에서 절댓값 방정식을 만족한다.

소문항 (iii)

g_1에서 x를 $2 - x$로 바꾸면 $(2 - x)e^{-(2-x)} = (2 - x)e^{x-2} = g_2(x)$이다. 따라서 $g_2(x) = g_1(2 - x)$이다. 즉 곡선 $y = g_2(x)$는 곡선 $y = g_1(x)$를 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이동한 것이다.



소문항 (iv)

$Y(x) = \mathrm{k}(c-x)$라 하고 $u = c - x$로 놓는다. $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -1$이므로 연쇄 법칙(chain rule)에 의해

$$Y'(x) = -\mathrm{k}'(u), \qquad Y''(x) = \mathrm{k}''(u).$$

따라서

$$Y'' - pY' + qY = \mathrm{k}''(u) + p\,\mathrm{k}'(u) + q\,\mathrm{k}(u),$$

이고, $r \le u \le s$일 때마다 우변은 0이다. 그 범위에서 k가 원래 방정식의 해이기 때문이다. 이제 $r \le c - x \le s$는

$$c - s \le x \le c - r,$$

와 동치이므로, $y = \mathrm{k}(c-x)$는 구간 $[c-s, c-r]$에서 $y'' - py' + qy = 0$을 만족한다.

이것으로 (iii)이 설명된다. $p = 2, q = 1, (-\infty, 1]$에서 $\mathrm{k} = \mathrm{g}_1, c = 2$로 놓으면, 반사된 함수 $\mathrm{g}_1(2-x)$는 $[1, \infty)$에서 $y'' - 2y' + y = 0$의 해이다.

소문항 (v)

$\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$이면

$$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

이므로 $\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\cos\frac{1}{2}\pi = 0$이다. (두 번째 꼴을 보면 주어진 대로 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\mathrm{h}' \ge 0$임과, 나중에 필요한 $\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$도 알 수 있다.)

계획은 소문항 (ii)와 같다. $y' \le 0$인 구간에서 방정식은 $y'' - 2y' + 2y = 0$이고, $y' \ge 0$인 곳에서는 $y'' + 2y' + 2y = 0$인데, h는 후자를 만족한다.

(a) $x = \frac{1}{4}\pi$에서 $y = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi/4} > 0$이고 $y' = 0$이므로 $y'' = -2y < 0$이고, y'은 음수로 바뀐다. 따라서 $y'' - 2y' + 2y = 0$의 해가 필요한데, $p = q = 2$인 소문항 (iv)가 그런 해를 하나 준다. $y = \mathrm{h}(c-x)$는 $c - \frac{1}{4}\pi \le x \le c + \frac{3}{4}\pi$에서 성립한다. $c = \frac{1}{2}\pi$로 택하면 이 구간이 정확히 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$가 되고,

$$y = \mathrm{h}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

> ? **생각해 보기** 이것이 그저 하나의 해가 아니라 바로 그 해라는 것을 어떻게 알 수 있는가?

이음매에서 값이 맞는다. $\mathrm{h}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi) = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$이고, 도함수 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x)$는 $x = \frac{1}{4}\pi$에서 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = 0$과 같다. 따라서 그곳에서 y와 y'은 연속이다. 또한 자기모순이 없다. $x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$이면 $\frac{1}{2}\pi - x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$이고 그곳에서 $\mathrm{h}' \ge 0$이므로, 구간 전체에서

$y' = -\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x) \le 0$이고 $|y'| = -y'$이다. 한 점에서 y와 y'이 주어진 선형 방정식의 해는 오직 하나뿐이므로, 이것이 바로 해의 연장이다. 따라서 $\frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$에서

$$y = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

(b) $x = \frac{5}{4}\pi$에서 $y = \mathrm{e}^{3\pi/4}\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} < 0$이고 $y' = -\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$이다. 이제 $y'' = -2y > 0$이므로 y'은 양수로 바뀌고, 방정식은 다시 $y'' + 2y' + 2y = 0$이 된다.

이 방정식은 상수계수이므로 해를 평행이동한 것도 해이다. $\sin(x - 2\pi) = \sin x$이므로 함수 $\mathrm{h}(x - 2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x$는 이 방정식의 해이며, $[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]$에서 그 변수 $x - 2\pi$는 $\mathrm{h}' \ge 0$인 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 위를 움직이므로 $y' \ge 0$과 모순되지 않는다. $x = \frac{5}{4}\pi$에서 이음매를 확인하면

$$\mathrm{e}^{2\pi - 5\pi/4}\sin\tfrac{5}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \qquad \mathrm{h}'(\tfrac{5}{4}\pi - 2\pi) = \mathrm{h}'(-\tfrac{3}{4}\pi) = 0,$$

으로 둘 다 맞는다. 따라서 $\frac{5}{4}\pi \le x \le \frac{9}{4}\pi$에서

$$y = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x.$$

$x = \frac{9}{4}\pi$에서 이 값은 $\mathrm{e}^{-\pi/4}\sin\frac{1}{4}\pi = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$이고 도함수는 o이다. 즉 해는 $\frac{1}{4}\pi$에서의 상태로 되돌아오므로, $x \ge \frac{1}{4}\pi$에서 해는 주기가 2π인 주기함수(periodic function)이다.

검산

- 조각들은 구성 방식상 매끄럽게 이어지지만, 직접 확인해 볼 만하다. $x = \frac{5}{4}\pi$에서 (a)와 (b)는 모두 $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} \approx -7.4605$를 주고, 기울기는 o이다.
- $y(0) = 0, y'(0) = 1$에서 출발하여 절댓값 방정식을 수치적으로 한 걸음씩 풀어 나가면, $[0, 4]$에서 $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$와 $[0, \frac{9}{4}\pi]$에서 (v)의 세 조각이 10^{-9} 이내의 오차로 재현된다.
- (a)를 직접 미분하면 $y' = \mathrm{e}^{x-\pi/2}(\cos x - \sin x)$, $y'' = -2\mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin x$이고, 요구대로 $y'' - 2y' + 2y = 0$이다.

흔한 실수

- 극점(turning point)을 지난 뒤에도 $|y'| = y'$으로 두는 것. $x = 1$ 너머에서 f 자체는 해가 아니다.
- 새 조각이 구간 전체에서 가정한 부호의 y'을 유지하는지 확인하는 것을 잊는 것.
- (iv)에서 구간을 $[r, s]$로 답하는 것. 반사에 의해 이 구간은 $[c - s, c - r]$로 옮겨진다.

STEP 너머

이와 같이 우변이 전환 곡면(switching surface, 여기서는 $y' = 0$)을 가로지르는 곳을 제외하면 매끄러운 방정식을 구간별 매끄러운(piecewise-smooth) 시스템 또는 전환 시스템(switching system)이라고 한다. 해는 선형 조각들을 이어 붙여 만들어지며, $|y'|$이 립시츠(Lipschitz) 연속이므로 해의 존재성과 유일성은 여전히 피카르–린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)로부터 따라 나온다. (v)의 2π-주기성은 선형 감쇠 방정식으로는 결코 얻을 수 없는 현상이다. $E = \frac{1}{2}y'^2 + y^2$로 놓으면 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = -2y'|y'|$이므로, "감쇠(damping)" 항은 y가 증가하는 동안에는 에너지를 빼앗고 y가 감소하는 동안에는 에너지를 되돌려 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 이론과 유일성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.