풀이

STEP III 2023, 문제 7

순수수학 • 적분 부등식

> **STEP III 2023, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

연속 함수(continuous function)의 제곱을 적분한 값은 결코 음수가 아니며, 그 값이 0이 되는 것은 함수가 항등적으로 0(identically zero)일 때뿐이다. 각 문항은 $\int(\text{어떤 것})^2$을 포함하는 등식을 주는데, 이를 조금 정리하면 "완전제곱(perfect square)의 적분이 0과 같다"는 꼴이 된다. 소문항 (i)은 (ii)를 위한 도구를 제공하고, (iii)에서는 부분적분(integration by parts)이 같은 역할을 하며, (iv)에서는 완전제곱식을 만들어 그 제곱을 직접 찾아내야 한다.

풀이

소문항 (i)

왼쪽 적분에서 $x = u^2$으로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$이다. x가 0에서 1까지 변할 때 $u \geq 0$도 같은 범위를 움직이고, $\sqrt{x} = u$이다. 따라서

$$\int_0^1 \mathrm{f}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{f}(u)\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

이고, 마지막 단계에서는 적분변수(dummy variable)의 이름만 바꾸었다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

소문항 (i)을 $\mathrm{f} = \mathrm{g}$로 놓고 적용하면 주어진 조건은 다음과 같이 된다.

$$\int_0^1 (\mathrm{g}(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

이제 구하려는 적분을 전개하고 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\mathrm{g}(x)-x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (\mathrm{g}(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0,\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

생각해 보기 적분이 0이라는 사실이 왜 "대부분"이 아니라 모든 곳에서 $\mathrm{g}(x) = x$가 되도록 강제하는가?

$\phi(x) = (\mathrm{g}(x)-x)^2$이라 하자. 이 함수는 (g가 연속이므로) 연속이고 $\phi(x) \geq 0$이다. 어떤 $c \in [0,1]$에 대하여 $\phi(c) > 0$이라고 가정하자. 연속성에 의해 c를 포함하고 길이가 양수 δ인 구간 $I \subseteq [0,1]$가 존재하여, 그 위에서 $\phi(x) > \frac{1}{2}\phi(c)$이다. 다른 모든 곳에서 $\phi \geq 0$이므로

$$\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_I \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2}\phi(c)\,\delta > 0,$$

이 되어 모순(contradiction)이다. 따라서 $0 \leq x \leq 1$인 모든 x에 대하여 $\phi(x) = 0$, 즉 $\mathrm{g}(x) = x$이다. (연속성은 정말 중요하다. 단 한 점에서만 x와 다른 함수도 적분값은 여전히 0이 되기 때문이다.)

소문항 (iii)

항 $2\mathrm{h}(1) - 2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x$를 보면 부분적분이 떠올라야 한다. 1의 원시함수(antiderivative)로 x를 택하여 $1\cdot\mathrm{h}(x)$를 부분적분하면

$$\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{h}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{h}(1) - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

따라서 $2\mathrm{h}(1) - 2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x$이고, 조건은 다음과 같이 된다.

$$\int_0^1 (\mathrm{h}'(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

이것은 g 자리에 h′을 넣은 소문항 (ii)의 조건(소문항 (i)을 거쳐 얻은 꼴)과 정확히 같다. 문제가 의도한 대로 h′이 연속이어야 한다는 점을 이용하여 같은 논증을 반복하면

$$\int_0^1 (\mathrm{h}'(x)-x)^2\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{h}'(x) = x \text{ 단, } 0 \leq x \leq 1.$$

이를 적분하면 $\mathrm{h}(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$이고, $\mathrm{h}(0) = 0$에서 $C = 0$이다. 따라서

$$\mathrm{h}(x) = \tfrac{1}{2}x^2.$$

소문항 (iv)

먼저 조건에 $1/a$가 들어 있으므로 $a \neq 0$임에 주의한다. 앞의 소문항들과 비교하여, 교차항(cross term)이 $-2\mathrm{k}(x)$가 되는 $\mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{p}(x))^2$ 꼴의 제곱을 찾는다. 전개하면 교차항은 $-2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{p}(x)\mathrm{k}(x)$이므로 $\mathrm{p}(x)=\mathrm{e}^{-ax}$이어야 한다.

$$\mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax})^2 = \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x))^2 - 2\mathrm{k}(x) + \mathrm{e}^{-ax}.$$

이를 $[0,1]$에서 적분하고, 처음 두 항에는 주어진 조건을, 마지막 항에는 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}$를 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-ax})^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-a}}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} + \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} = -\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\Big)^2 = -\frac{(a-2)^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

좌변은 음이 아닌 연속 함수의 적분이므로 ≥ 0이고, 우변은 ≤ 0이다. 따라서 둘 다 o이어야 하며, 이로부터 $(a-2)^2=0$, 즉 $a=2$이다.

$a=2$일 때 음이 아닌 연속 함수 $\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{e}^{-2x})^2$의 적분이 o이므로, 소문항 (ii)의 논증에 의해 이 함수는 $[0,1]$ 전체에서 o이다. $\mathrm{e}^{2x}>0$이므로 다음을 얻는다.

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

검산

- 소문항 (i)에서 $\mathrm{f}(x)=x$로 두면, 좌변은 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$이고 우변은 $2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$이다.
- 소문항 (iii): $\mathrm{h}=\frac{1}{2}x^2$이면 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$이고 $2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$이다. 두 값이 일치한다.
- 소문항 (iv): $a=2, \mathrm{k}=\mathrm{e}^{-2x}$이면 좌변은 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}) \approx 0.43233$이고, 우변은 $(1-\mathrm{e}^{-2}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$로 같다. 임의의 a와 임의의 다항식 k에 대하여 항등식 "좌변 빼기 우변 $= \int \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}-\mathrm{e}^{-ax})^2 + (a-2)^2/(4a^2)$"을 컴퓨터로 확인한 결과도 일치하였다.

흔한 실수

- 연속성과 음이 아님을 이용하지 않고 적분이 o이라는 사실만으로 $\mathrm{g}(x)=x$라고 결론짓는 것. 적분이 o이라는 사실 하나만으로는 아무것도 말할 수 없다.
- 소문항 (iv)에서 $a \neq 0$임을 밝히는 것을 잊거나, 완전제곱식을 만들기 전에 k를 추측하려 하는 것.

STEP 너머

양 $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$는 "벡터" f와 g의 내적(dot product)처럼 행동하고, $\int_0^1 (g-x)^2\,dx$는 g와 x 사이 거리의 제곱이다. 각 소문항은 "이 거리가 0이다"라고 말하는 셈이며, (iv)의 가중치 e^{ax}는 가중 내적(weighted inner product)을 준다. 이러한 관점(내적 공간(inner product space), 그리고 노름(norm)이 0인 연속 함수는 0이라는 사실)은 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)과 해석학(analysis)의 핵심이다. Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)와 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.