풀이

STEP III 2023, 문제 6

순수수학 • 쌍곡선 함수와 단조성

> **STEP III 2023, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 함수 모두 $\tan^{-1} x$와 $\tanh x$의 상수배의 차이므로, 도함수(derivative)는 $\dfrac{1}{1+x^2}$와 $\operatorname{sech}^2 x$의 상수배의 차가 된다. 따라서 모든 것은 $\cosh^2 x$와 $1+x^2$를 비교하는 문제로 귀결된다. (i)의 부등식(inequality)이 f'의 부호를 결정하고, 비 $\cosh^2 x/(1+x^2)$가 증가함을 보이면 이 비가 $\frac{1}{2}\pi$와 같아지는 횟수, 곧 g'이 0이 되는 횟수를 정확히 알 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh 2x)$와 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$를 이용하면, e^x의 매클로린 급수(Maclaurin series)로부터 (홀수 차수 항은 상쇄되어) 다음을 얻는다.

$$\cosh 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots.$$

모든 항이 음이 아니므로 $\cosh 2x \geq 1 + 2x^2$이고, 따라서

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2x) \geq \tfrac{1}{2}(2+2x^2) = 1 + x^2,$$

이며 등호는 $x = 0$일 때만 성립한다($x \neq 0$이면 x^4 항이 양수이다).

이제 미분하면

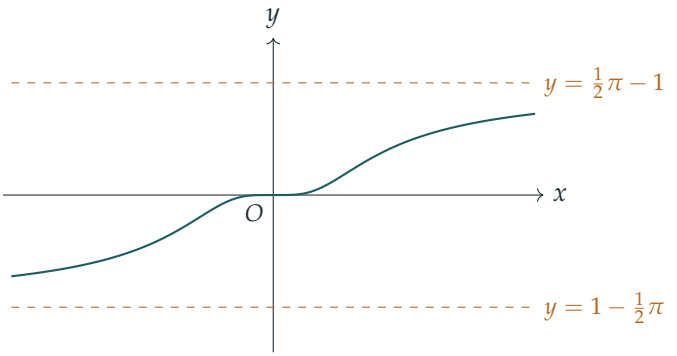
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

$\cosh^2 x \geq 1 + x^2 > 0$이므로 역수는 $\dfrac{1}{\cosh^2 x} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$를 만족하고, 따라서 모든 x에 대해

$f'(x) \geq 0$이며 등호는 $x = 0$에서만 성립한다. 한 점을 제외하고 도함수가 양수인 함수는 (순)증가함수(strictly increasing function)이므로, 증명이 끝난다.

그래프 개형. 그래프에 나타낼 특징은 다음과 같다.

- f는 기함수(odd function)이고($\tan^{-1}$과 tanh가 모두 기함수이다), $f(0) = 0$이다.
- $f'(0) = 0$이지만 f는 증가하므로, 원점은 정류 변곡점(stationary point of inflection)이다. 실제로 $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$이고 $\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$이므로 0 근처에서 $f(x) \approx \frac{1}{15}x^5$이다. 즉 그래프는 그 근처에서 매우 평평하다.
- $x \to \infty$일 때 $\tan^{-1} x \to \frac{1}{2}\pi$이고 $\tanh x \to 1$이므로, $f(x) \to \frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$이며 아래쪽에서 접근한다. 기함수이므로 $x \to -\infty$일 때 $f(x) \to 1 - \frac{1}{2}\pi$이다.



소문항 (ii)(a)

이 경우

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2\cosh^2 x},$$

이고, 이는 연속인 우함수(even function)이다. $x = 0$에서 $g'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$이다. $x = 2$에서는

$$g'(2) = \frac{1}{5} - \frac{\pi}{2\cosh^2 2},$$

이고, $\cosh 2 > \frac{1}{2}e^2 > 3.6$이므로 $\cosh^2 2 > 12.9$이며 $\dfrac{\pi}{2\cosh^2 2} < \dfrac{1.6}{12.9} < \frac{1}{5}$이다. 따라서 $g'(2) > 0$이다. 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 g'은 $(0, 2)$에서 영점을 가지며, g'이 우함수이므로 $(-2, 0)$에서도 영점을 하나 더 가진다. 그러므로 g는 적어도 두 개의 정류점(stationary point)을 가진다.

소문항 (ii)(b)

$h(x) = (1+x^2)\sinh x - x\cosh x$라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sinh x + (1+x^2)\cosh x - \cosh x - x\sinh x \\ &= x\sinh x + x^2\cosh x. \end{aligned}$$

$x \geq 0$이면 $x\sinh x$와 $x^2\cosh x$가 모두 음이 아니므로($x > 0$이면 양수이다), h는 $[0,\infty)$에서 증가한다. $h(0) = 0$이므로 $x \geq 0$에 대해 $h(x) \geq 0$이고, 실제로 $x > 0$에 대해 $h(x) > 0$이다.

소문항 (ii)(c)

몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh^2 x}{1+x^2}\right) = \frac{2\cosh x\sinh x\,(1+x^2) - 2x\cosh^2 x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cosh x\,h(x)}{(1+x^2)^2}.$$

$x \geq 0$이면 $\cosh x > 0$이고 (b)에 의해 $h(x) \geq 0$이므로 이 도함수는 음이 아니며, $x = 0$에서만 0이다. 따라서 $\cosh^2 x/(1+x^2)$는 $x \geq 0$에서 (순)증가한다.

소문항 (ii)(d)

생각해 보기 $\cosh^2 x/(1+x^2)$에 관한 명제로 어떻게 g'의 영점 개수를 셀 수 있을까?

$\mathrm{g}'(x) = 0$의 양변에 양수 $(1+x^2)\cosh^2 x$를 곱하면

$$\mathrm{g}'(x) = 0 \iff \frac{\cosh^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

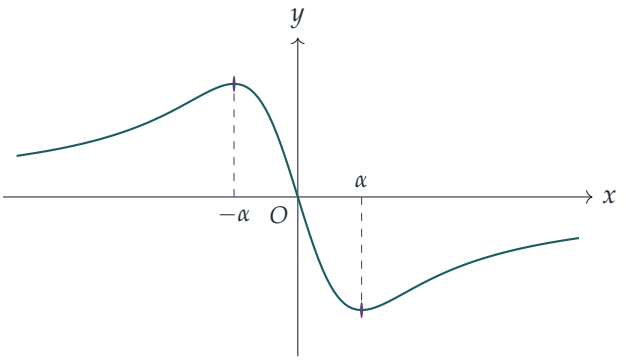
임을 알 수 있다. $R(x) = \cosh^2 x/(1+x^2)$라 하자. $[0,\infty)$에서 R은 연속이고 (c)에 의해 순증가하며 $R(0) = 1 < \frac{1}{2}\pi$이므로, 이 구간에서 값 $\frac{1}{2}\pi$를 많아야 한 번 가진다. (a)에 의해 실제로 이 값을 $0 < \alpha < 2$인 어떤 α에서 가진다. 따라서 g'은 $[0,\infty)$에서 정확히 하나의 영점을 가진다. R이 우함수이므로 $x < 0$인 영점은 $x > 0$인 영점의 부호를 바꾼 것이고, 따라서 $-\alpha$에서 정확히 하나가 더 있다. 그러므로 g는 $x = \pm\alpha$에서 정확히 두 개의 정류점을 가진다(수치적으로 $\alpha \approx 1.406$이다).

소문항 (ii)(e)

사실들을 모아 보자.

- g는 기함수이고, $\mathrm{g}(0) = 0$이며 $\mathrm{g}'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$이다.

- (d)로부터 $(-\alpha, \alpha)$에서 $g' < 0$이고(이 구간에서 $R < \frac{1}{2}\pi$이다), $|x| > \alpha$이면 $g' > 0$이다. 따라서 $x = -\alpha$에서 극대(local maximum), $x = \alpha$에서 극소(local minimum)를 가지며, $g(\alpha) = -g(-\alpha) < 0$이다(약 -0.44).
- $x \to \infty$일 때 $g(x) \to \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \cdot 1 = 0$이다. g는 (α, ∞)에서 극한값 0을 향해 증가하므로 이 구간에서 계속 음수이다. 즉 그래프는 아래쪽에서 x축에 접근한다. 기함수이므로 $x \to -\infty$일 때 $g(x) \to 0$이며 위쪽에서 접근한다.
- 따라서 g의 영점은 원점뿐이다. 즉 $x < 0$이면 $g > 0$이고 $x > 0$이면 $g < 0$이다.



검산

- $x = 1$에서: $\cosh^2 1 \approx 2.381 \geq 2$이므로 (i)과 일치한다.
- $f(30) \approx 0.537$로 아래쪽에서 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$에 접근하고, $f(0.1) \approx 6.6 \times 10^{-7}$로 $\frac{1}{15}(0.1)^5$에 가깝다.
- $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\pi(1 + x^2)$를 수치적으로 풀면 $\alpha \approx 1.406$으로 (a)의 예측대로 $(0, 2)$ 안에 있고, $g(\alpha) \approx -0.440$이다. $[-20, 20]$에서 g'을 촘촘하게 조사하면 부호 변화가 정확히 두 번 나타나며, $g(20) \approx -0.050$은 그래프 개형에서처럼 작은 음수이다.

흔한 실수

- $\cosh^2 x \geq 1 + x^2$를 $\operatorname{sech}^2 x \leq \dfrac{1}{1 + x^2}$로 뒤집어야 한다는 것을 잊는 실수. 이는 양변이 모두 양수이기 때문에 성립한다.
- (d)에서 양의 근이 하나뿐임만 증명하고, 음의 근을 세기 위해 우함수 성질을 이용하는 것(또는 $x = 0$이 근이 아님을 언급하는 것)을 잊는 실수.
- g의 그래프를 $y = 0$이 아닌 점근선(asymptote)으로 그리거나, 큰 x에서 축을 다시 가로지르도록 그리는 실수. (α, ∞)에서의 단조성(monotonicity)이 이를 배제한다.

STEP 너머

(ii)의 방법, 즉 "$g' = 0$의 해는 몇 개인가?"를 "단조함수가 어떤 값을 몇 번 지나는가?"로 바꾸는 방법은 해석학자들이 근의 개수를 세는 기본적인 방법이다. 연속성과 중간값 정리는 존재성을, 순단조성은 유일성을 보장한다. 이러한 아이디어는 대학의 첫 해석학(analysis) 강좌에서 엄밀하게 다루어진다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이 내용이 꼼꼼하게 전개되는 것을 볼 수 있는 훌륭한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.