풀이

# STEP III 2023, 문제 5

순수수학 • 정수론

> **STEP III 2023, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

각 소문항은 정수에 관한 방정식을, 인수(factor)를 완전히 알고 있는 수와 같은 곱(*product*)의 꼴로 바꾼다. 그 수는 차례로 49, $pq$, $3p^2q$이다. 한 변이 두 정수의 곱이 되고 나면, 각 인수의 크기(어느 쪽이 더 큰지, 어느 쪽이 $p$보다 작은지)를 따져 가능한 경우를 한두 가지로 줄일 수 있다. 소문항 (iii)에서 우리가 다루는 인수는 $p+q-n$이며, 증명하라고 요구하는 부등식(inequality)이 바로 이 인수가 $p$ 또는 $q$와 공통인수를 갖지 못하게 막아 준다.

## 풀이

### 소문항 (i)

양변에 $7xy$(두 수 모두 0이 아니다)를 곱하면

$$7y + 14x = 2xy \quad \Longleftrightarrow \quad 2xy - 14x - 7y = 0.$$

를 얻는다. $(2x-7)(y-7) = 2xy - 14x - 7y + 49$이므로 양변에 49를 더하면 요구한 대로 $(2x-7)(y-7) = 49$가 된다.

이제 $x$와 $y$가 양의 정수라고 하자. 그러면 $2x-7$과 $y-7$은 곱이 49인 정수이므로 49의 인수 쌍이다.

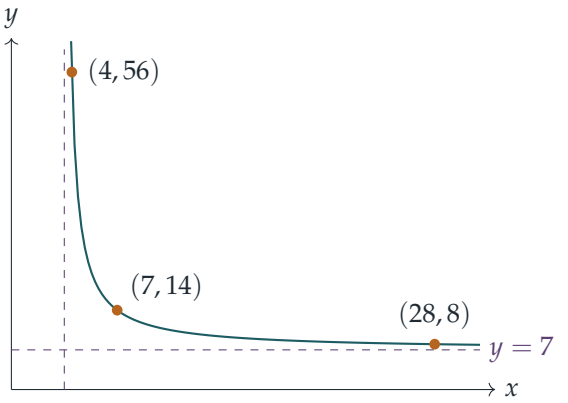
$$(2x-7,\ y-7) \in \{(1,49),\ (7,7),\ (49,1),\ (-1,-49),\ (-7,-7),\ (-49,-1)\}.$$

양수라는 조건 때문에 음수 쌍은 제외된다. $x \geq 1$이면 $2x-7 \geq -5$이고, $y \geq 1$이면 $y-7 \geq -6$이므로 어느 인수도 $-7$이나 $-49$가 될 수 없는데, 모든 음수 쌍은 이 둘 중 하나

를 포함한다. 양수 쌍에서

$$(x, y) = (4, 56), \quad (7, 14), \quad (28, 8),$$

를 얻고, 각각이 실제로 원래 방정식을 만족한다. 예를 들어 $\frac{1}{4} + \frac{2}{56} = \frac{7}{28} + \frac{1}{28} = \frac{2}{7}$이다.




이 곡선은 점근선(asymptote)이 $x = \frac{7}{2}$와 $y = 7$인 직각쌍곡선(rectangular hyperbola)이며, 세 해는 양의 가지 위에 있는 격자점(lattice point)이다.

**소문항 (ii)**

전개하면 $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = n^2 + pq$이므로

$$(p + q + n)(p + q - n) = (p + q)^2 - n^2 = pq.$$

이다.

우변은 양수이고 $p + q + n > 0$이므로 $p + q - n$은 **양의** 정수이다. $pq$의 양의 약수(divisor)는 $1, p, q, pq$이며($p = q$이면 $1, p, p^2$뿐이다), $p + q + n$은 이 중 하나이다. 그런데 $n > 0$이므로 $p + q + n > p$이고 $p + q + n > q$이어서, $p + q + n$은 $p$도 $q$도 아니다. 남은 약수는 $pq$뿐이다. 따라서 $p + q + n = pq$이고 짝이 되는 인수는

$$p + q - n = 1, \qquad \text{즉,} \qquad p + q = n + 1.$$

이다.

$n = p + q - 1$을 $p + q + n = pq$에 대입하면 $2p + 2q - 1 = pq$이고, 이를 정리하면

$$pq - 2p - 2q + 4 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad (p - 2)(q - 2) = 3.$$

이다. 소수(prime)는 $p - 2 \geq 0$을 만족하므로 두 인수 모두 음이 아니고, 곱이 3이므로 $\{p - 2, q - 2\} = \{1, 3\}$이다. 그러므로

$$(p, q) = (3, 5) \quad \text{또는} \quad (5, 3),$$

이고, 실제로 $9 + 15 + 25 = 49 = 7^2$이며 $n = 7 = 3 + 5 - 1$이다.

**소문항 (iii)**

여기서 $n$은 $p^3+q^3+3pq^2$의 양의 실수 세제곱근(cube root)이다.

**부등식.** $p,q>0$이므로

$$n^3=q^3+(p^3+3pq^2)>q^3, \qquad n^3=p^3+(q^3+3pq^2)>p^3,$$

이고, 세제곱은 순증가하므로 $n>q$이고 $n>p$이다. 이를 정리하면 각각 $p+q-n<p$와 $p+q-n<q$가 된다. 아래쪽 한계도 필요하다.

$$(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=n^3+3p^2q>n^3,$$

이므로 $p+q>n$, 즉 $p+q-n>0$이다.

**소수 해가 없음.** $p$와 $q$가 소수이고 $n$이 정수라고 가정하자. $d=p+q-n$이라 두면 $d$는

$$0<d<p, \qquad 0<d<q.$$

를 만족하는 정수이다. 위의 전개에서 $(p+q)^3-n^3=3p^2q$이고, 세제곱의 차를 인수분해하면

$$d\left((p+q)^2+(p+q)n+n^2\right)=3p^2q,$$

이므로 $d$는 $3p^2q$를 나눈다.

> **생각해 보기** 왜 $d$는 $p$나 $q$와 공통인수를 가질 수 없는가?

$p$가 소수이므로 $d$가 $p$와 공통인수를 가지는 유일한 방법은 $p$가 $d$를 나누는 것인데, 그러려면 $d\geq p$이어야 한다. 그런데 $d<p$이다. 마찬가지로 $d<q$이므로 $q$는 $d$를 나누지 않는다. 따라서 $d$는 $p^2q$와 서로소(coprime)이고, $d\mid 3p^2q$에서 $d\mid 3$이 따라 나온다. 부등식이 필요했던 이유가 바로 이것이다. 따라서 $d=1$ 또는 $d=3$이다. $s=p+q$라 쓰자.

**경우 $d=1$.** 이때 $n=s-1$이고

$$3p^2q=s^3-(s-1)^3=3s^2-3s+1,$$

인데, 이는 불가능하다. 좌변은 3의 배수이고 우변은 3으로 나눈 나머지가 1이기 때문이다.

**경우 $d=3$.** 이제 $3=d<p$이고 $3<q$이므로 $p$와 $q$ 모두 3이 아니다. 여기서 $n=s-3$이고

$$3p^2q=s^3-(s-3)^3=9s^2-27s+27, \qquad \text{따라서} \qquad p^2q=3(s^2-3s+3).$$

이다. 그러므로 $3\mid p^2q$이고, 3은 소수이므로 $p$ 또는 $q$를 나누어 둘 중 하나는 3과 같아야 한다. 이는 $p,q>3$에 모순이다.

두 경우 모두 불가능하므로 $p^3+q^3+3pq^2$가 정수의 세제곱이 되는 소수 $p$와 $q$는 존재하지 않는다. ■

## 검산

$x, y < 2000$인 모든 양의 정수에 대해 전수 탐색(brute-force search)을 하면 (i)의 세 쌍만 정확히 나온다. $p, q < 1500$인 모든 소수에 대해 $p^2 + pq + q^2$가 완전제곱수(perfect square)가 되는 것은 $\{p, q\} = \{3, 5\}$일 때뿐이며(49가 된다), $p^3 + q^3 + 3pq^2$는 결코 완전세제곱수(perfect cube)가 되지 않는다. 무작위로 고른 양의 실수로 (iii)의 $0 < p + q - n < \min(p, q)$를 확인할 수 있다. (ii)를 손으로 간단히 확인하면 $(3 + 5 + 7)(3 + 5 - 7) = 15 \times 1 = 15 = pq$이다.

## 흔한 실수

- (i)에서 49의 음수 인수 쌍을 빠뜨리는 것. 여기서는 해를 주지 않지만, 무시할 것이 아니라 배제해야 한다.
- (ii)에서 $p + q - n$이 더 작은 인수이고 양수라는 것을 근거 없이 가정하는 것. 두 사실 모두 $n > 0$과 $pq > 0$에서 따라 나오지만, 반드시 밝혀 적어야 한다.
- (iii)에서 $d \mid 3$에서 멈추는 것. 두 경우 $d = 1$과 $d = 3$을 여전히 배제해야 하며, 두 번째 경우에는 $d < p, q$라는 사실이 한 번 더 필요하다.

## STEP 너머

모든 소문항이 같은 기법을 쓴다. 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을 소인수분해를 알고 있는 수와 같은 정수들의 곱으로 바꿔 쓴 다음, 크기와 서로소 조건을 이용해 인수를 확정하는 것이다. 소문항 (i)은 이집트 분수(Egyptian fraction) 방정식 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$의 무리에 속하고, 소문항 (ii)는 120°인 각을 가진 정수 삼각형에 관한 문제이다. $p^2 + pq + q^2 = n^2$이 바로 그 각에 대한 코사인 법칙(cosine rule)이기 때문이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 이런 종류의 초등 정수론(elementary number theory)을 소개하는 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.