풀이

STEP III 2023, 문제 4

순수수학 • 체비쇼프 다항식의 계수

> **STEP III 2023, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

$\cos((2n+1)\theta)$를 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1}$의 실수부(real part)로 쓰면 p가 명시적인 합으로 바뀌고, p의 각 계수는 이항계수(binomial coefficient)의 합이 된다. 짝수 첨자에 대해서만 더하는 $\sum\binom{N}{2r}$나 $\sum r\binom{N}{2r}$ 꼴의 합은 $(1+t)^N$(또는 그 도함수(derivative))에 $t=1$과 $t=-1$을 대입한 뒤 더하거나 빼서 구한다. 그러면 홀수 첨자 항이 상쇄되기 때문이다. 마지막 소문항에서는 인수분해(factorisation)의 양변에서 최고차 쪽 몇 개의 계수를 비교한다.

풀이

풀이 전체에서 $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$로 쓴다.

소문항 (i)

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)와 이항정리(binomial theorem)에 의해

$$\cos((2n+1)\theta) + \mathrm{i}\sin((2n+1)\theta) = (c+\mathrm{i}s)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}c^{2n+1-k}(\mathrm{i}s)^k.$$

c와 s는 실수이므로 실수인 항은 정확히 k가 짝수인 항, 즉 $0 \le r \le n$인 $k = 2r$에 해당하는 항이고, 이때 $(\mathrm{i}s)^{2r} = (-1)^r s^{2r} = (-s^2)^r = (c^2-1)^r$이다. 실수부를 취하면

$$\cos((2n+1)\theta) = \sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{2r}\cos^{2n+1-2r}\theta\,(\cos^2\theta - 1)^r,$$

이므로 원하는 결과가 성립한다.

소문항 (ii)

소문항 (i)에 의해

$$\mathrm{p}(x) = 1 + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r} x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$$

가 모든 $x = \cos\theta \in [-1, 1]$에 대해 성립한다. 양변은 무한히 많은 점에서 값이 같은 다항식(polynomial)이므로 같은 다항식이다.

r번째 항의 차수는 $(2n+1-2r)+2r = 2n+1$이고 최고차항의 계수(leading coefficient)는 $\binom{2n+1}{2r}$이며, 상수 1은 x^{2n+1}에 영향을 주지 않는다. 따라서 p에서 x^{2n+1}의 계수는

$$S_0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r},$$

즉 짝수 첨자 이항계수의 합이다. $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$에 $t = 1$과 $t = -1$을 대입하면

$$2^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k}, \qquad 0 = \sum_k (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

두 식을 더하면 k가 홀수인 항은 상쇄되고 k가 짝수인 항은 두 배가 되어 $2S_0 = 2^{2n+1}$이다. 따라서 $\mathrm{p}(x)$에서 x^{2n+1}의 계수는 $S_0 = 2^{2n}$이다.

소문항 (iii)

r번째 항 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$에서 x^{2n-1}을 얻으려면 $(x^2-1)^r$의 x^{2r-2} 항이 필요하다. 그 항은 $\binom{r}{1}(x^2)^{r-1}(-1) = -rx^{2r-2}$이다($r = 0$일 때는 이 항이 없는데, 이는 $-r = 0$과 일치한다). $n \geq 1$이므로 $2n-1 \geq 1$이고, 따라서 p의 상수 1은 관여하지 않는다. 그러므로 x^{2n-1}의 계수는

$$-\sum_{r=0}^{n} r \binom{2n+1}{2r}.$$

> **생각해 보기** 각 항에 r이 곱해져 있을 때 짝수 첨자 항만 골라내려면 어떻게 해야 할까?

미분하면 첨자가 인수로 내려온다. $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$로부터

$$(2n+1)(1+t)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} k \binom{2n+1}{k} t^{k-1}.$$

$t = 1$을 대입하면 $\sum_k k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n}$이다. $t = -1$을 대입하면 ($2n \geq 1$이므로) 좌변이 0이 되어

$$0 = \sum_k (-1)^{k-1} k \binom{2n+1}{k} = \sum_{k\,\text{홀수}} k \binom{2n+1}{k} - \sum_{k\,\text{짝수}} k \binom{2n+1}{k}.$$

따라서 k가 짝수인 부분과 홀수인 부분은 같고, 각각 전체의 절반이다.

$$\sum_{k\text{ 짝수}} k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n-1}.$$

$k = 2r$로 놓으면 이는 $\sum_r 2r\binom{2n+1}{2r} = (2n+1)2^{2n-1}$, 즉 $\sum_r r\binom{2n+1}{2r} = (2n+1)2^{2n-2}$를 뜻한다. 따라서 $\mathrm{p}(x)$에서 x^{2n-1}의 계수는 $-(2n+1)2^{2n-2}$이고, 원하는 결과가 성립한다.

소문항 (iv)

최고차항의 계수. (ii)에 의해 p는 차수가 $2n+1$이고 최고차항의 계수가 2^{2n}이다. q의 차수가 m이고 최고차항의 계수가 a이면 $(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$의 차수는 $2m+1$이고 최고차항의 계수는 a^2이다. 따라서 $m = n$이고 $a^2 = 2^{2n}$이며, $a > 0$이므로 q에서 x^n의 계수는 2^n이다.

p에 관한 사실 하나 더. $x^{2n+1-2r}$은 홀수 거듭제곱이고 $(x^2-1)^r$은 짝수 거듭제곱만 가지므로, 모든 항 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$은 x의 홀수 거듭제곱만 포함한다. p에서 유일한 짝수 거듭제곱은 상수 1뿐이다. $2n \geq 2$이므로 p에서 x^{2n}의 계수는 0이다.

계수 비교. 이제 $n \geq 2$로 두고

$$\mathrm{q}(x) = 2^n x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots,$$

로 쓰면

$$[\mathrm{q}(x)]^2 = 2^{2n}x^{2n} + 2^{n+1}b\,x^{2n-1} + (b^2 + 2^{n+1}c)x^{2n-2} + \cdots.$$

$x+1$을 곱하면 $(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$에서 x^{2n}과 x^{2n-1}의 계수는 각각

$$2^{n+1}b + 2^{2n} \qquad \text{와} \qquad (b^2 + 2^{n+1}c) + 2^{n+1}b.$$

p에서 x^{2n}의 계수는 0이므로 $b = -2^{2n}/2^{n+1} = -2^{n-1}$이다. 그러면 $b^2 = 2^{2n-2}$, $2^{n+1}b = -2^{2n}$이고, x^{2n-1}의 계수를 소문항 (iii)의 결과와 맞추면

$$2^{2n-2} + 2^{n+1}c - 2^{2n} = -(2n+1)2^{2n-2}.$$

정리하면

$$2^{n+1}c = 2^{2n-2}(-(2n+1) - 1 + 4) = 2^{2n-2}(2-2n) = 2^{2n-1}(1-n),$$

이므로 q에서 x^{n-2}의 계수는

$$c = 2^{n-2}(1-n),$$

이고, 원하는 결과가 성립한다.

검산

- $n = 1$일 때: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$이므로 $\mathrm{p}(x) = 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(2x-1)^2$이다. 최고차항의 계수는 2^2, x의 계수는 $-3 = -3 \cdot 2^0$이고, q의 최고차항의 계수는 2^1이다.
- $n = 2$일 때: $\mathrm{p}(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)^2$이다. x^3의 계수는 $-20 = -5 \cdot 2^2$이고, q의 상수항은 $-1 = 2^0(1-2)$이다.
- $n = 3$일 때 $\mathrm{q}(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$을 얻었고, x의 계수는 $-4 = 2^1(1-3)$이다. $\cos\left((2n+1)\theta\right) + 1$을 정확히 전개하고 $\mathrm{p}(x)/(x+1)$의 제곱근을 구하는 컴퓨터 검산으로 $n = 1, \ldots, 12$에 대해 모든 계수 공식을 확인했다.

흔한 실수

- p에서 x^{2n}의 계수를 잊어버리는 것. 이 계수는 0이며, 바로 이것이 q의 x^{n-1}의 계수 b를 결정한다. c를 구하려면 먼저 b가 필요하다.
- $(\mathrm{is})^{2r} = s^{2r}$로 써서 부호 $(-1)^r$을 잃어버리는 것. 이 부호 덕분에 $1 - \cos^2\theta$가 아니라 $\cos^2\theta - 1$이 나온다.
- (iii)에서 도함수에 $t = 1$만 대입하는 것. 그러면 짝수인 k만이 아니라 모든 k에 대한 합이 나온다.

STEP 너머

$T_N(\cos\theta) = \cos N\theta$를 만족하는 다항식 T_N을 N차 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomial)이라 하며, 소문항 (ii)와 (iii)은 그 최고차 쪽 두 계수를 구한 것이다. (iv)의 인수분해는 $T_{2n+1}(x) + 1$이 $x = -1$에서 단순근(simple root)을 갖고, $\cos\left((2n+1)\theta\right) = -1$이 되는 나머지 각 점에서 중근(double root)을 갖는다는 사실을 반영한다. 체비쇼프 다항식은 근사 이론(approximation theory)에서 핵심적인 역할을 한다. N차 모닉 다항식(monic polynomial) 가운데 $[-1, 1]$에서 최댓값의 크기가 가장 작은 것이 $2^{1-N}T_N$이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 이런 종류의 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.