풀이

# STEP III 2023, 문제 3

순수수학 • 삼차방정식의 복소근

> **STEP III 2023, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

$a$를 기준으로 재면 세 점은 $sb\mathrm{i}$, $-sb\mathrm{i}$, $b$이다. i를 곱하면 벡터(vector)가 직각만큼 회전하므로, $a$는 밑변의 중점이고 $b$는 대칭축 방향을 가리킨다. 이 그림을 염두에 두면 (ii)는 비에트의 공식(Vieta's formulas)의 문제가 된다. 근의 합이 0이므로 $b$가 $a$로 결정되고, 그러면 $p^3/q^2$에서 $a$가 소거된다. (iii)과 (iv)에서는 이 결과를 $x = s^2 > 0$에 대한 일변수 함수(function)로 바꾸고, 그 그래프를 통해 값이 얼마나 작아질 수 있는지 알아본다.

## 풀이

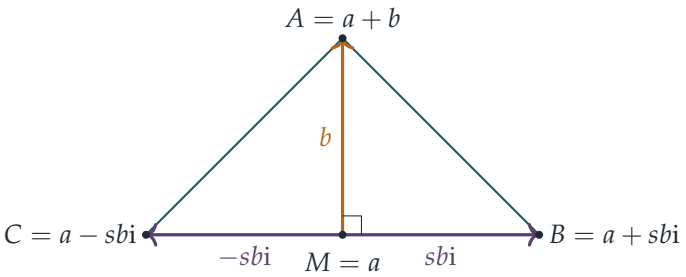
### 소문항 (i)

$a + b$에서 나머지 두 점까지의 거리는 다음과 같다.

$$|(a + sb\mathrm{i}) - (a + b)| = |b|\,|s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1},$$
$$|(a - sb\mathrm{i}) - (a + b)| = |b|\,|-s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1}.$$

두 거리는 같다. 이제 세 점이 실제로 삼각형을 이룬다는 것을 보여야 한다. $a$를 기준으로 하면 세 점은 $sb\mathrm{i}$, $-sb\mathrm{i}$, $b$이다. 앞의 두 점은 서로 다르며($s > 0$이고 $b \neq 0$이므로), $a$를 지나고 $b\mathrm{i}$ 방향인 직선 위에 있다. $b\mathrm{i}$는 $b$를 직각만큼 회전한 것이므로, $b \neq 0$이면 세 번째 점 $a + b$는 그 직선 위에 있지 않다. 따라서 세 점은 꼭짓점이 $a + b$이고, 밑변이 $a - sb\mathrm{i}$에서 $a + sb\mathrm{i}$까지이며, 밑변의 중점이 $a$인 이등변삼각형(isosceles triangle)을 이룬다.

**$a$, $b$, $s$ 되찾기.** 삼각형의 꼭짓점을 $A$(길이가 같은 두 변이 만나는 꼭짓점이다. 정삼각형(equilateral triangle)이라면 어느 꼭짓점이든 좋다)라 하고, 나머지 꼭짓점을 $B$, $C$라 하자. $BC$의 중점을 $M$이라 하자.




- $a = M = \frac{1}{2}(B + C)$로 잡는다.
- $b = A - M$으로 잡는다. $A$는 $BC$ 위에 있지 않으므로 이 값은 0이 아니다.
- $AB = AC$이므로 $A$는 $BC$의 수직이등분선(perpendicular bisector) 위에 있고, 따라서 $MB \perp MA$이다. 그러므로 $B - M$은 $b$를 직각만큼 회전한 뒤 크기를 조정한 것이다. 즉 0이 아닌 어떤 실수 $\lambda \neq 0$에 대해 $B - M = \lambda b\mathrm{i}$이다. $\lambda < 0$이면 $B$와 $C$의 이름을 맞바꾸는데, 그러면 $\lambda$의 부호가 바뀐다. 이제 $s = \lambda > 0$은 다음과 같다.

$$s = \frac{MB}{MA} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\text{삼각형의 높이}}.$$

그러면 $a + b = A$, $a + sb\mathrm{i} = B$, $a - sb\mathrm{i} = M - (B - M) = C$이므로 원하는 결과를 얻는다.

**소문항 (ii)**

(i)에 의해 근을 $a + sb\mathrm{i}$, $a - sb\mathrm{i}$, $a + b$로 놓을 수 있다. 여기서 $b \neq 0$, $s > 0$이다. 이 삼차식에는 $z^2$항이 없으므로 근의 합은 0이다.

$$3a + b = 0, \qquad \text{따라서} b = -3a$$

이고, $b \neq 0$이므로 $a \neq 0$이다. 따라서 근은 다음과 같다.

$$a(1 - 3s\mathrm{i}), \qquad a(1 + 3s\mathrm{i}), \qquad -2a.$$

앞의 두 근의 곱은 $a^2(1 + 9s^2)$이고 합은 $2a$이다. 그러므로 비에트의 공식에 의해

$$\begin{aligned} p &= a^2(1 + 9s^2) + (-2a)(2a) = a^2(9s^2 - 3) = 3a^2(3s^2 - 1), \\ q &= -(\text{근의 곱}) = -(-2a)\, a^2(1 + 9s^2) = 2a^3(9s^2 + 1). \end{aligned}$$

여기서 $a \neq 0$이므로 $q \neq 0$이고, 따라서 나눌 수 있다.

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27a^6(3s^2 - 1)^3}{4a^6(9s^2 + 1)^2} = \frac{27(3s^2 - 1)^3}{4(9s^2 + 1)^2},$$

이때 $s$는 0이 아닌(실제로는 양의) 실수이므로 원하는 결과를 얻는다.

**소문항 (iii)**

$x \neq -\frac{1}{9}$에서 정의된 $y = \dfrac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}$를 생각하자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{9(3x-1)^2(9x+1)^2 - (3x-1)^3 \cdot 18(9x+1)}{(9x+1)^4} \\ &= \frac{9(3x-1)^2\big[(9x+1) - 2(3x-1)\big]}{(9x+1)^3} = \frac{27(3x-1)^2(x+1)}{(9x+1)^3}.\end{aligned}$$

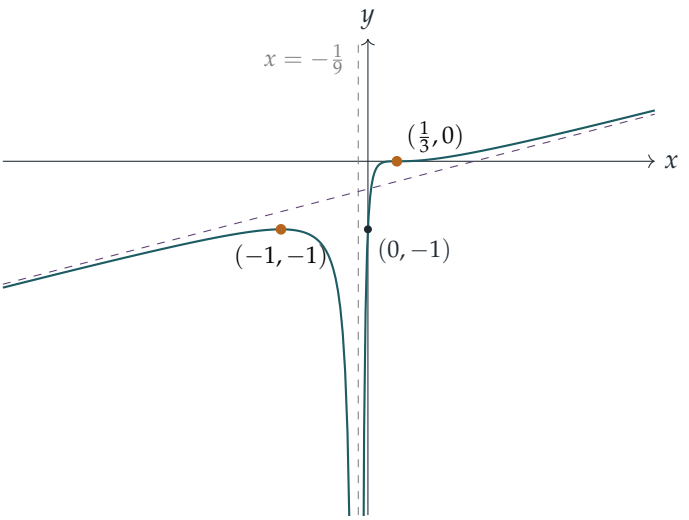
따라서 정류점(stationary point)은 $x = -1$과 $x = \frac{1}{3}$에 있다.

- $x = -1$에서: $y = (-4)^3/(-8)^2 = -1$이다. $x < -1$이면 인수 $x+1$과 $(9x+1)^3$이 모두 음수이므로 $y' > 0$이다. $-1 < x < -\frac{1}{9}$이면 $(9x+1)^3$만 음수이므로 $y' < 0$이다. 따라서 $(-1, -1)$은 **극대점**(local maximum)이다.
- $x = \frac{1}{3}$에서: $y = 0$이다. 양쪽 모두에서($x > -\frac{1}{9}$인 범위에서) $(3x-1)^2$을 제외한 모든 인수가 양수이고, $x \neq \frac{1}{3}$이면 $(3x-1)^2 > 0$이다. 따라서 양쪽에서 $y' > 0$이고, $(\frac{1}{3}, 0)$은 **정류 변곡점**(stationary point of inflection)이다.

특히 $y$는 $x > -\frac{1}{9}$에서 순증가(strictly increasing)한다. 그 범위에서는 한 점 $x = \frac{1}{3}$을 제외하면 $y' > 0$이기 때문이다.

그 밖의 특징은 다음과 같다.

- 수직 점근선(vertical asymptote) $x = -\frac{1}{9}$. 이 근처에서 분자는 $(-\frac{4}{3})^3 < 0$에, 분모는 $0^+$에 가까워지므로 양쪽 모두에서 $y \to -\infty$이다.
- $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$을 $81x^2 + 18x + 1$로 나누면 몫이 $\frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$이므로, $x \to \pm\infty$일 때 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$이 사점근선(oblique asymptote)이다.
- 곡선은 $(0, -1)$과 $(\frac{1}{3}, 0)$에서 좌표축과 만난다.




점선은 사점근선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$이다. 왼쪽 가지는 결코 $-1$보다 위로 올라가지 않는다. 오른쪽 가지는 $-\infty$에서부터 모든 실숫값을 지나며 증가한다.

**소문항 (iv)**

(ii)에서 구한 실수 $s \neq 0$과 $x = s^2$에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}.$$

$s$가 실수이므로 우변은 실수이고, 따라서 $p^3/q^2$도 실수이다.

> **생각해 보기** 그래프는 $-\infty$까지 내려가는데, 왜 $p^3/q^2$는 아주 큰 음수가 될 수 없을까?

$x = s^2$은 아무 실수나 될 수 있는 것이 아니기 때문이다. $s$는 0이 아닌 실수이므로 $x > 0$이다. 따라서 우리가 관심 있는 $x$의 값은 오른쪽 가지에 있고, (iii)에 의해 그곳에서 $y$는 순증가한다. 그러므로 $x > 0$일 때

$$\frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2} > \frac{(0-1)^3}{(0+1)^2} = -1,$$

이고, 따라서

$$\frac{p^3}{q^2} > -\frac{27}{4}.$$

$x = 0$(즉 $s = 0$)인 경우가 제외되므로 이 부등식(inequality)은 등호 없이 성립한다. 그런 경우라면 삼각형이 선분으로 찌그러지게 된다.

## 검산

- 정삼각형: $z^3 - 1 = 0$의 근은 정삼각형을 이룬다. 이때 $p = 0$이고, 공식에 따르면 $p = 0$인 것은 정확히 $s^2 = \frac{1}{3}$일 때, 즉 밑변의 절반이 높이의 $\frac{1}{\sqrt{3}}$배일 때이며, 이것이 바로 정삼각형의 모양이다.
- 구체적인 예: $a = 1$, $s = 1$이면 근은 $1 \pm 3\mathrm{i}$와 $-2$이므로 $z^3 + 6z + 20 = 0$이다. 그러면 $p^3/q^2 = 216/400 = \frac{27}{50}$이고, 공식으로 계산해도 $\frac{27 \cdot 8}{4 \cdot 100} = \frac{27}{50}$이다.
- $s \to 0$이면 삼각형은 납작해지면서 $a$에서의 중근으로 다가가고, $p^3/q^2 \to -\frac{27}{4}$이다. 실제로 $4p^3 + 27q^2 = 0$은 정확히 중근(repeated root)을 가질 조건이다. $s = 10^{-4}$일 때 그 값은 약 $-6.749998$이다.
- 무게중심(centroid)이 원점인 이등변삼각형들을 무작위로 골라 컴퓨터로 확인했다. $p^3/q^2$는 항상 실수였고 $-6.75$보다 컸다.

## 흔한 실수

- (i)에서 $a$와 $b$를 실수로 취급하는 것. 이들은 복소수이므로 삼각형은 어떤 각도로든 놓일 수 있다.
- $q$의 부호를 틀리는 것. 최고차항의 계수가 1인 삼차식(monic cubic)에서 $q$는 근의 곱에 **마이너스**를 붙인 값이다.
- (iv)에서 그래프 전체를 사용하면서 $x = s^2 > 0$이라는 사실을 잊는 것. 바로 이 조건이 우리를 오른쪽 가지에 머무르게 한다.

## STEP 너머

$-(4p^3 + 27q^2)$는 이 삼차식의 판별식(discriminant)이고, $p^3/q^2$는 모양 불변량(shape invariant)이다. 근들을 무게중심을 중심으로 회전하거나 확대·축소해도 이 값은 변하지 않으므로($z$를 $kz$로 바꾸면 $p$에는 $k^2$이, $q$에는 $k^3$이 곱해진다), 이 값은 근이 이루는 삼각형의 **모양**만을 기록한다. 이와 같은 불변량은 변수 변환을 무시하고 다항식을 분류하는 일의 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 문제가 요구하는 방식으로 복소수를 기하적으로 생각하는 법을 알려 주는 아름다운 안내서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.