풀이

STEP III 2023, 문제 2

순수수학 • 극곡선으로 둘러싸인 넓이

> **STEP III 2023, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

두 곡선 모두 $\theta = 0$에서 $\theta = \pi$까지 돌아가는 동경(radius)이 그려 내는 곡선이므로, 이 문제는 결국 각 각도에서 어느 곡선이 더 바깥에 있는지에 관한 것이다. $k(1+\sin\theta)$와 $k+\cos\theta$를 비교하면 두 곡선의 바깥·안쪽 관계가 정확히 한 번, $\theta = \alpha$에서 뒤바뀐다는 것을 알 수 있다. 그러면 영역 A와 B를 합친 것은 두 곡선이 겹치는 부분이 되고, 모든 넓이는 극좌표(polar coordinates) 넓이 공식 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$로 구하며, 이때 $\sin^2$과 $\cos^2$은 배각 공식(double angle formula)으로 처리한다.

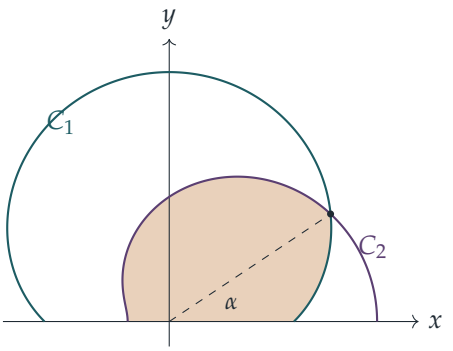
풀이

소문항 (i)

개형을 그리는 데 다음 값들이 도움이 된다.

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \pi$
C_1: $r = k(1+\sin\theta)$	k	$2k$	k
C_2: $r = k+\cos\theta$	$k+1$	k	$k-1$

($k > 1$이므로) 두 동경의 길이는 언제나 양수이다. C_1은 심장형(cardioid)의 위쪽 절반으로, y축에 대하여 대칭이고 $(0, 2k)$까지 올라간다. C_2는 "반지름이 대략 k"인 약간 찌그러진 반원으로, $\theta = 0$에서는 오른쪽으로 1만큼 밀려 나가고 $\theta = \pi$에서는 1만큼 안으로 들어와 있다. 아래 그림은 $k = 1.5$인 경우이며, 색칠한 영역이 두 곡선이 겹치는 부분이다.



교점에서는 두 동경의 길이가 같으므로

$$k(1+\sin\alpha) = k+\cos\alpha \iff k\sin\alpha = \cos\alpha.$$

이때 $\cos\alpha \neq 0$이다(만약 그렇다면 $k\sin\alpha = 0$이어야 하는데, 그때는 $\sin\alpha = \pm 1$이다). 따라서 양변을 나누면 요구한 대로 $\tan\alpha = \dfrac{1}{k}$를 얻는다. $0 < \frac{1}{k} < 1$이므로 $[0,\pi]$에서 이러한 각은 정확히 하나 존재하며, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$이다.

더 유용한 사실은 $k+\cos\theta - k(1+\sin\theta) = \cos\theta - k\sin\theta$가 $0 \le \theta < \alpha$에서 양수이고 $\alpha < \theta \le \pi$에서 음수라는 것이다(아래의 $\sin\alpha, \cos\alpha$ 값을 쓰면 이 식은 $\sqrt{1+k^2}\,\sin(\alpha-\theta)$와 같고, $\alpha-\theta$는 각각 $(0,\alpha]$ 또는 $[\alpha-\pi, 0)$에 속한다). 따라서 C_2는 α 이전에는 C_1의 바깥에, 그 이후에는 안쪽에 있다.

또한 $\tan\alpha = \frac{1}{k}$로부터 얻는 다음 값도 사용할 것이다.

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

소문항 (ii)

영역 A는 $0 \le \theta \le \alpha$에서 C_1까지 이르는 동경이 쓸고 지나가는 영역이므로, 그 넓이는

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^\alpha k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{k^2}{2}\int_0^\alpha \left(1+2\sin\theta+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{k^2}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\alpha \\
&= \frac{k^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\right) \\
&= \frac{k^2}{4}(3\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + k^2(1-\cos\alpha),
\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$와 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$를 이용하였다. 이것이 요구한 식이다.

소문항 (iii)

마찬가지로 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$를 이용하면 B의 넓이는

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\pi (k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\pi \left(k^2+\tfrac{1}{2}+2k\cos\theta+\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\left(k^2+\tfrac{1}{2}\right)\theta+2k\sin\theta+\tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_\alpha^\pi \\ &= \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-k\sin\alpha-\tfrac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

이다. α의 삼각함수를 없애고 싶다면, 소문항 (i)의 값으로부터 $k\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$이고 $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{k}{1+k^2}$이므로

$$\text{B의 넓이} = \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{k}{4(1+k^2)}.$$

소문항 (iv)

생각해 보기 A와 B를 합친 영역은 어떤 모양인가?

소문항 (i)에 의하여 $\theta<\alpha$에서 A의 경계는 안쪽 곡선인 C_1이고, $\theta>\alpha$에서 B의 경계는 안쪽 곡선인 C_2이다. 따라서 R는 두 영역이 겹치는 부분(그림에서 색칠한 부분)의 넓이이다. 이것만으로도 답을 짐작할 수 있다. k가 크면 C_2는 거의 전부 C_1 안에 놓이므로, 겹치는 부분은 T의 거의 전부가 되어야 한다.

전체 넓이는 같은 적분을 $[0,\pi]$에서 계산하여 얻는다($\sin\theta$ 항과 $\sin 2\theta$ 항은 양 끝에서 0이 되고, $-2\cos\theta$는 4를 준다).

$$T=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi (k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi(2k^2+1)}{4},\qquad S=\tfrac{1}{2}\int_0^\pi k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{k^2(3\pi+8)}{4}.$$

$k\to\infty$일 때 $\alpha=\arctan\frac{1}{k}\to 0$이다. A를 전개하는 대신 그 크기를 위에서 누른다. $[0,\alpha]$에서 $r=k(1+\sin\theta)\le 2k$이므로 A는 반지름이 $2k$이고 중심각이 α인 부채꼴(sector) 안에 놓이며, $\alpha<\tan\alpha=\frac{1}{k}$이므로

$$0<\text{A의 넓이}\le\tfrac{1}{2}(2k)^2\alpha<2k.$$

따라서 $\dfrac{\mathrm{A}}{T}<\dfrac{8k}{\pi(2k^2+1)}\to 0$이다. B에 대해서는 소문항 (iii)의 결과를 T로 나누면

$$\frac{\mathrm{B}}{T}=\frac{\pi-\alpha}{\pi}-\frac{4\left(k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha\right)}{\pi(2k^2+1)}\to 1-0=1,$$

인데, 이는 $\alpha \to 0$이고 $0 < k\sin\alpha + \frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha < k+1$이 $2k^2+1$에 비해 작기 때문이다. 그러므로

$$\frac{R}{T} = \frac{\mathrm{A}}{T} + \frac{\mathrm{B}}{T} \to 1.$$

마지막으로

$$\frac{R}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{T}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{\pi(2k^2+1)}{k^2(3\pi+8)} \to 1\cdot\frac{2\pi}{3\pi+8} = \frac{2\pi}{3\pi+8}.$$

검산

- $\theta = 0$에서 $C_2(r = k+1)$는 $C_1(r = k)$의 바깥에 있고, $\theta = \frac{\pi}{2}$에서는 안쪽에 있으므로($k < 2k$), 두 곡선은 그 사이에서 반드시 만나야 한다. 이는 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$와 맞아떨어진다.
- $k = 2$일 때: $\alpha = \arctan\frac{1}{2} \approx 0.4636$, $\mathrm{A} \approx 1.4132$, $\mathrm{B} \approx 5.0309$, $T = \frac{9}{4}\pi \approx 7.0686$이므로 $R/T \approx 0.912$이다. $\frac{1}{2}r^2$을 직접 수치적분한 결과도 두 공식과 일치한다.
- $k = 50$일 때 $R/T \approx 0.99987$이고 $R/S \approx 0.36061$로, $\frac{2\pi}{3\pi+8} \approx 0.36059$에 가깝다.
- 극한에 대한 직관적 확인: k가 아주 크면 C_2는 거의 반지름 k인 반원(넓이 $\frac{1}{2}\pi k^2$)이고, C_1은 넓이가 $\frac{3\pi}{4}+2$인 고정된 반심장형을 k배 한 것이다. 그 비는 $\frac{2\pi}{3\pi+8}$이다.

흔한 실수

- 극좌표 넓이 공식에서 인수 $\frac{1}{2}$을 빠뜨리거나, $1+\sin\theta$를 제곱하여 $1+\sin^2\theta$로 쓰는 것.
- 소문항 (iv)에서 $k^2(1-\cos\alpha)$가 "$\alpha \to 0$이므로 0으로 수렴한다"고 주장하는 것. 이 항에는 k^2이 곱해져 있으며, 실제로는 $\frac{1}{2}$로 수렴한다. 중요한 것은 T에 비해 이 항이 얼마나 큰가뿐이다.

STEP 너머

극형식으로 주어진 두 영역이 겹치는 부분의 넓이를 구하는 일은, 대학 1학년 다변수 미적분학(multivariable calculus)에서 만나는 넓이 적분 $\iint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$를 처음 맛보는 것이다. 그곳에서도 언제나 어려운 부분은 바로 여기서처럼 영역을 기술하는 일이다. 소문항 (iv)의 극한 논증(항을 정확히 계산하기보다 그 크기를 위에서 누르는 방식)은 해석학(real analysis)의 방식이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 이러한 방식이 꼼꼼하게 전개되는 모습을 보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.