풀이

STEP III 2023, 문제 11

확률과 통계 • 조건부 기댓값

> **STEP III 2023, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

처음의 급수는 $k+1=k+1$로 쓰고 k를 $k!$과 약분하면 익숙한 두 개의 지수급수(exponential series)로 나뉜다. 소문항 (i)에서 D의 분포(distribution)는 $D=d$를 만들 수 있는 Y의 모든 값에 대한 합을 포함한다. 이중합(double sum)의 순서를 바꾸면 안쪽 합은 쉬운 $1+2+\cdots+k$가 되고, 이때 나타나는 인수 $\frac{1}{2}(k+1)$이 바로 처음의 급수가 다루는 것이다. 소문항 (ii)는 주사위에 대한 조건부(conditioning) 계산으로 해결된다.

풀이

급수

$k \geq 1$이면 $\dfrac{k}{k!} = \dfrac{1}{(k-1)!}$이므로, 분자를 나누면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!}x^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\ &= x\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1\right) \\ &= x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1 = (x+1)\mathrm{e}^x - 1,\end{aligned}$$

이다. 여기서 첫 번째 합에는 $j=k-1$을 사용하였다. 두 급수 모두 모든 실수 x에 대하여 수렴(converge)하므로, 이렇게 나누는 것은 정당하다. 이것이 구하는 항등식이다.

소문항 (i)(a)

$D = 0$인 것은 정확히 $Y = 0$일 때이다($Y = k \geq 1$이면 주사위는 적어도 1을 보여 준다). 따라서

$$\mathrm{P}(D = 0) = \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-n}.$$

소문항 (i)(b)

$d \geq 1$을 고정한다. 주사위가 d를 보여 줄 수 있는 것은 주사위의 면이 적어도 d개일 때, 즉 $k \geq d$인 $Y = k$일 때뿐이다. 그리고 $Y = k \geq d$라는 조건 아래에서 공정한 주사위(fair die)는 확률 $\frac{1}{k}$로 d를 보여 준다. 전확률 법칙(law of total probability)에 의하여

$$\mathrm{P}(D = d) = \sum_{k=d}^{\infty} \mathrm{P}(D = d \mid Y = k)\,\mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=d}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}.$$

정의에 의하여 $\mathrm{E}(D) = \sum_{d=0}^{\infty} d\,\mathrm{P}(D = d)$이고, $d = 0$인 항은 0이므로

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{d=1}^{\infty} \left[d \sum_{k=d}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \right) \right],$$

이 되어 구하는 식을 얻는다.

> **생각해 보기** 바깥쪽이 d에 대한 합이고 안쪽이 $k \geq d$에 대한 합인 것을, 바깥쪽이 k에 대한 합인 것으로 어떻게 바꿀 수 있을까?

이중합은 $1 \leq d \leq k$인 정수의 모든 쌍 (d, k)에 걸쳐 있다. 모든 항 $\frac{d}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$은 음이 아니므로, 항들을 어떤 순서로 더해도 합은 변하지 않는다. d 대신 k를 기준으로 묶으면, 각 $k \geq 1$에 대하여 d는 1부터 k까지 움직인다. 따라서

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \sum_{d=1}^{k} d \right),$$

이고, 이것이 구하는 두 번째 형태이다.

소문항 (i)(c)

$\sum_{d=1}^{k} d = \frac{1}{2}k(k+1)$을 사용하면 인수 $\frac{1}{k}$이 약분된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(D) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} n^k \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}\left((n+1)\mathrm{e}^{n} - 1 \right) = \tfrac{1}{2}\left(n + 1 - \mathrm{e}^{-n} \right),\end{aligned}$$

여기서 처음의 항등식에 $x = n$을 대입하였다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)(a)

n면 주사위가 보여 주는 수를 K라 하자. 그러면 $k = 1, \dots, n$에 대하여 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n}$이고, $K = k$라는 조건 아래에서 $Z = X_k$이며, 이는 평균이 k인 푸아송 분포(Poisson distribution)를 따른다. 따라서 $\mathrm{P}(Z = 0 \mid K = k) = \mathrm{e}^{-k}$이고, 전확률 법칙에 의하여

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}.$$

이것은 첫째항이 e^{-1}이고 공비가 e^{-1}인 기하급수(geometric series)이다.

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n(\mathrm{e} - 1)},$$

여기서 분자와 분모에 e를 곱하였다.

소문항 (ii)(b)

다시 주사위에 대한 조건을 걸면 $\mathrm{E}(Z \mid K = k) = \mathrm{E}(X_k) = k$이므로

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(Z \mid K = k)\,\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

소문항 (i)(c)와 비교하면

$$\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(D) = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1-\mathrm{e}^{-n}}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} > 0,$$

이므로 $\mathrm{E}(Z) > \mathrm{E}(D)$이고, 이로써 증명된다.

흥미롭게도 0인 경우가 없다면 두 값은 같아진다. 면의 개수가 푸아송 분포를 따르는 Y인 공정한 주사위는 평균적으로 $\frac{1}{2}(Y+1)$을 보여 주고, 이것의 평균은 $\frac{1}{2}(n+1)$이다. 유일한 손실은 $Y = 0$일 때 공식 $\frac{1}{2}(Y+1)$이 주는 $\frac{1}{2}$ 대신 $D = 0$이 된다는 점이며, 이 일은 확률 e^{-n}으로 일어나므로 정확히 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}$만큼 손해를 본다.

검산

- $x = 0$이면 처음의 항등식은 $0 = 1 \cdot 1 - 1$이 되고, $x = 1$이면 $\sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{k!} = 2\mathrm{e} - 1 \approx 4.4366$을 주는데, 부분합(partial sums)으로 이를 확인할 수 있다.
- $n = 3$일 때: $\mathrm{E}(D) = \frac{1}{2}(4 - \mathrm{e}^{-3}) \approx 1.9751$, $\mathrm{E}(Z) = 2$, $\mathrm{P}(Z = 0) \approx 0.1843$이다. 각 실험을 200 000번 시행한 컴퓨터 시뮬레이션에서는 1.970, 2.002, 0.185를 얻었다.
- $n = 1$이면 소문항 (ii)의 주사위는 항상 1을 보여 주므로 $\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{e}^{-1}$이다. 공식도 $\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{-1}$을 준다.

흔한 실수

- (i)(b)에서 안쪽 합을 $k = d$가 아니라 $k = 1$부터 시작하는 것. k면 주사위는 k보다 큰 수를 보여 줄 수 없다.
- 처음의 항등식에서 -1을 빠뜨리는 것. 이 -1은 e^x에서 빠진 $k = 0$인 항에서 오며, (i)(c)에 나오는 e^{-n}의 원천이다.

STEP 너머

두 소문항은 모두 타워 법칙(tower law) $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Z \mid K)\big)$의 예이다. 소문항 (i)에서 이 법칙을 쓰면 한 줄 만에 $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\frac{1}{2}(Y+1)\mathbf{1}_{Y\geq 1}\big)$을 얻으며, 우리가 손으로 한 합의 순서 바꾸기는 바로 이 법칙이 감추고 있는 것이다. 음이 아닌 항으로 이루어진 이중급수를 자유롭게 재배열할 수 있다는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)에서 만나는 정리(일반적인 형태로는 토넬리(Tonelli)의 정리)이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 조건부 기댓값(conditional expectation)과 그것으로 만들어지는 복합 분포(compound distributions)를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.