풀이

STEP III 2023, 문제 10

역학 • 보의 평형

STEP III 2023, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

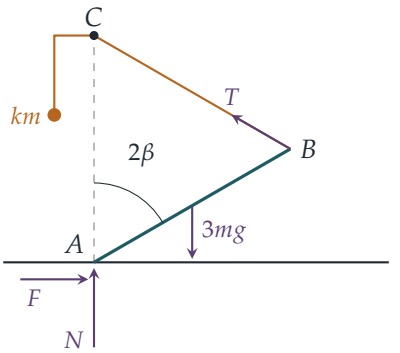
www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

도르래는 A에서 정확히 보의 길이만큼 위에 있으므로, A, B, C는 $AB = AC = 2h$인 이등변 삼각형(isosceles triangle)을 이룬다. 이 기하 구조 덕분에 줄의 방향과 A에서 줄까지의 수직 거리를 공짜로 얻는다. 그다음은 평형(equilibrium) 상태에 있는 막대를 다루는 통상적인 방법을 따르면 된다. A에 대한 모멘트(moment)를 취하고(이렇게 하면 미지의 두 접촉력이 모두 사라진다), 힘을 분해(resolve)한 뒤, $F \leq \mu N$이라는 조건을 적용한다.

풀이

보는 균일한 막대로, 입자들은 질점으로, 줄은 매끄러운 도르래에 걸린 가볍고 늘어나지 않는 줄로 모형화한다. 따라서 장력(tension)은 줄 전체에서 같다. 매달린 입자가 평형 상태에 있으므로 장력은 $T = kmg$이다.



A를 원점에 두고, x축은 수평으로(B가 있는 쪽을 향하게), y축은 연직 위쪽으로 잡는다. 그

러면 $C = (0, 2h)$이고 $B = 2h(\sin 2\beta, \cos 2\beta)$이다.

줄의 방향. B에서 C로 향하는 벡터(vector)는 $1 - \cos 2\beta = 2\sin^2\beta$를 이용하면

$$2h\big(-\sin 2\beta,\ 1 - \cos 2\beta\big) = 4h\sin\beta\,(-\cos\beta,\ \sin\beta),$$

이다. 따라서 보에 작용하는 장력은 $-x$ 방향(직선 AC 쪽으로 되돌아가는 방향)으로 수평 성분 $T\cos\beta$를, 위쪽으로 연직 성분 $T\sin\beta$를 가진다. 기하적으로 보면, 이등변삼각형 ABC에서 밑각은 $90^\circ - \beta$이므로 BC는 수평선과 각 β를 이룬다.

모멘트 팔. A에서 BC에 내린 수선은 이등변삼각형의 꼭지각 2β를 이등분하므로, 그 길이는 $2h\cos\beta$이다.

소문항 (i)

A에 대한 모멘트. 무게 $3mg$는 AB의 중점에 작용하며, 이 점은 A로부터 수평 거리 $h\sin 2\beta$만큼 떨어져 있다. 이를 장력과 균형시키면

$$kmg \cdot 2h\cos\beta = 3mg \cdot h\sin 2\beta = 6mgh\sin\beta\cos\beta.$$

$0 < 2\beta < 180^\circ$이므로 $\cos\beta \neq 0$이고, 따라서 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$\boxed{k = 3\sin\beta.}$$

(이는 $k < 3$과 모순되지 않는다.)

힘의 분해. 연직 방향으로 $N + T\sin\beta = 3mg$이므로

$$N = 3mg - 3mg\sin^2\beta = 3mg\cos^2\beta.$$

수평 방향으로는 마찰력(friction)이 줄의 수평 방향 당김과 균형을 이루어야 하므로, 마찰력은 $+x$ 방향으로 작용하며

$$F = T\cos\beta = 3mg\sin\beta\cos\beta.$$

따라서 $F/N = \tan\beta$이다.

마찰 조건. 평형이 되려면 $F \le \mu N$, 즉 $\tan\beta \le \mu$이어야 한다. 이제

$$k^2 = 9\sin^2\beta = \frac{9\tan^2\beta}{1 + \tan^2\beta}.$$

함수 $t \mapsto \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$는 $t \ge 0$에서 증가하고, $0 \le \tan^2\beta \le \mu^2$이므로

$$k^2 \le \frac{9\mu^2}{\mu^2 + 1},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

이제 $T = 2mg$이고, 질량 m인 추가 입자는 A로부터 수평 거리 $xh\sin 2\beta$에 놓여 있다. 줄의 기하 구조는 바뀌지 않는다.

A에 대한 모멘트:

$$2mg \cdot 2h\cos\beta = 3mg\,h\sin 2\beta + mg\,xh\sin 2\beta = 2mgh(3+x)\sin\beta\cos\beta,$$

이고, $2mgh\cos\beta \neq 0$으로 나누면

$$\sin\beta = \frac{2}{3+x}.$$

$0 \le x \le 2$일 때 이 값은 $\frac{2}{5}$와 $\frac{2}{3}$ 사이에 있으므로, 이러한 β가 존재한다.

힘의 분해:

$$N = 4mg - 2mg\sin\beta, \qquad F = 2mg\cos\beta,$$

따라서

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{4\cos^2\beta}{(4-2\sin\beta)^2} = \frac{\cos^2\beta}{(2-\sin\beta)^2}.$$

$\sin\beta = 2/(3+x)$를 대입하면

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{4}{(3+x)^2} = \frac{(3+x-2)(3+x+2)}{(3+x)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(3+x)^2},$$
$$2-\sin\beta = \frac{2(3+x)-2}{3+x} = \frac{2(x+2)}{3+x}.$$

$(3+x)^2$ 인수들이 약분되어

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{4(x+2)^2} = \frac{x^2+6x+5}{4(x+2)^2},$$

이 남고, 이것이 구하는 결과이다.

> **생각해 보기** "x의 값이 무엇이든"이라는 말을 어떻게 μ에 대한 조건으로 바꿀 수 있을까?

각 x에 대해 $F \le \mu N$, 즉 $\mu \ge F/N$이어야 한다. 모든 $x \in [0,2]$를 포함하려면 μ는 그 구간에서 F/N의 **가장 큰** 값 이상이어야 한다. 따라서 F^2/N^2의 최댓값을 구하면 된다.

힌트를 따르면

$$\frac{1}{3} - \frac{F^2}{N^2} = \frac{4(x+2)^2 - 3(x^2+6x+5)}{12(x+2)^2} = \frac{x^2-2x+1}{12(x+2)^2} = \frac{(x-1)^2}{12(x+2)^2} \ge 0,$$

이고, 등호는 정확히 $x = 1$일 때 성립하며 이 값은 허용 범위 안에 있다. 따라서 모든 $x \in [0,2]$에 대해 $F^2/N^2 \le \frac{1}{3}$이고, 이 상한은 $x = 1$에서 도달된다. 그러므로 F/N의 최댓값

은 $1/\sqrt{3}$이고, 보가 모든 x에 대해 평형 상태에 있을 수 있을 필요충분조건은 $\mu \geq 1/\sqrt{3}$이다. 최솟값은

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

검산

- 소문항 (i)에서 보가 수평으로 놓인 경우, 즉 $2\beta = 90^\circ$인 경우를 생각해 보자. 그러면 $B = (2h, 0)$이고, 줄 BC는 45°를 이루며 A에서 줄까지의 거리는 $\sqrt{2}\,h$이다. 모멘트로부터 $T\sqrt{2}\,h = 3mgh$이므로 $T = 3mg/\sqrt{2}$이고, 이는 $k = 3\sin 45^\circ$와 일치한다. 또한 $N = F = \frac{3}{2}mg$이므로 $F/N = 1 = \tan 45^\circ$이다.
- 소문항 (ii)에서 $x = 0$일 때 공식은 $5/16$을 주고, 직접 계산하면 $\sin\beta = \frac{2}{3}$, $\cos^2\beta = \frac{5}{9}$, $(2 - \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$이므로 역시 $\frac{5}{16}$을 얻는다.
- $x = 1$일 때: $\sin\beta = \frac{1}{2}$이므로 $\beta = 30^\circ$이고 보는 연직선과 60°를 이룬다. $F/N = \cos 30^\circ / (2 - \frac{1}{2}) = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$이다. $[0, 2]$ 전체의 x에 대해 모멘트와 분해한 힘을 컴퓨터로 확인한 결과, 이 공식과 최댓값이 맞음을 확인하였다.

흔한 실수

- 줄이 연직 방향이 아니라 BC를 따라 당긴다는 사실을 잊는 것. 도르래가 C에 있으므로 장력에는 수평 성분이 있고, 마찰력이 버텨야 하는 것이 바로 이 성분이다.
- $0 \leq x \leq 2$에서 F/N의 최댓값 대신 최솟값(또는 끝점에서의 값)을 취하는 것. 가장 나쁜 경우는 구간 내부인 $x = 1$에서 일어난다.
- 모멘트 팔을 혼동하는 것. 무게의 팔은 수평 거리($h\sin 2\beta$)이고, 장력의 팔은 BC까지의 수직 거리($2h\cos\beta$)이다.

STEP 너머

모멘트를 취하는 것과 힘을 분해하는 것은 강체(rigid body)의 평형 조건, 즉 알짜힘이 0이고 알짜 토크(torque)가 0이라는 두 조건의 두 반쪽이다. 대학에서는 이것이 벡터 명제 $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$과 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$이 되며, 소문항 (ii)의 "매개변수에 대한 최악의 경우" 추론은 공학자들이 안전 여유를 고려해 설계하는 방식을 살짝 맛보게 해 준다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 벡터 언어로 정역학과 토크를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.