풀이

STEP III 2023, 문제 1

순수수학 • 이차곡선의 접선

> **STEP III 2023, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

직선이 원에 접할 필요충분조건은 원의 중심에서 직선까지의 수직 거리(perpendicular distance)가 반지름과 같은 것이다. 따라서 현(chord) PQ를 p와 q로 나타내고, 그 거리를 계산하면 접선(tangent) 조건이 주어진 관계식으로 정리되는 것을 볼 수 있다. 그 뒤로는 모든 것이 두 매개변수(parameter)에 대한 하나의 대칭(symmetric) 방정식에 관한 문제가 된다. 마지막 소문항은 **세 번째** 변에 대해서도 이 관계식이 성립하는지 묻는데, 이는 근의 합과 곱, 즉 근과 계수의 관계(sums and products of roots)로 해결할 일이다.

풀이

소문항 (i)

PQ의 기울기(gradient)는

$$\frac{aq^2 - ap^2}{2aq - 2ap} = \frac{p+q}{2},$$

이다. 여기서 두 점이 서로 다르므로 $q - p \neq 0$으로 나누었다. 따라서 P를 지나는 직선은 $y - ap^2 = \frac{1}{2}(p+q)(x - 2ap)$이고, 이를 정리하면

$$(p+q)x - 2y - 2apq = 0.$$

이다. 중심 $C(0, 3a)$에서 이 직선까지의 거리는

$$\frac{|-6a - 2apq|}{\sqrt{(p+q)^2 + 4}} = \frac{2a|pq+3|}{\sqrt{(p+q)^2+4}}.$$

이다. 직선이 원에 접할 필요충분조건은 이 값이 $2a$와 같은 것, 즉 (양변이 모두 양수이므로 제곱하고 $4a^2 \neq 0$을 약분하면)

$$(pq+3)^2 = (p+q)^2 + 4 \iff p^2q^2 + 6pq + 5 = (p+q)^2.$$

이다. 이것이 바로 $(*)$이므로, $(*)$가 성립하면 직선 PQ는 원의 접선이다. (모든 단계가 거꾸로도 성립하므로 역(converse)도 성립하며, 이 사실은 소문항 (iii)에서 필요하다.)

소문항 (ii)

$(*)$를 전개하고 q의 거듭제곱끼리 모으면

$$(1-p^2)q^2 - 4pq + (p^2-5) = 0.$$

이다. $p^2 \neq 1$이므로 최고차항의 계수가 0이 아니고, 따라서 이것은 q에 대한 진짜 이차방정식(quadratic)이다. 판별식(discriminant)은

$$\begin{aligned} 16p^2 - 4(1-p^2)(p^2-5) &= 16p^2 - 4(-p^4 + 6p^2 - 5) \\ &= 4(p^4 - 2p^2 + 5) \\ &= 4((p^2-1)^2 + 4) > 0, \end{aligned}$$

이므로 서로 다른 두 실근 q_1, q_2가 존재한다. 어느 것도 p와 같지 않다. 좌변에 $q = p$를 대입하면 $-p^4 - 2p^2 - 5 < 0$이 되기 때문이다. 따라서 Q_1과 Q_2는 실제로 P와 다른 점이다.

이차방정식으로부터

$$q_1 + q_2 = \frac{4p}{1-p^2}, \qquad q_1 q_2 = \frac{p^2-5}{1-p^2}.$$

이다.

소문항 (iii)

삼각형 PQ_1Q_2를 생각하자. 여기서 $Q_i = (2aq_i, aq_i^2)$이고 q_1, q_2는 소문항 (ii)의 두 근이다. 세 꼭짓점은 모두 $x^2 = 4ay$ 위에 있고, ((ii)에서 보였듯이) 서로 다른 세 점이다. 직선은 포물선(parabola)과 많아야 두 점에서 만나므로, 포물선 위의 서로 다른 세 점은 결코 한 직선 위에 있지(collinear) 않다. 따라서 이것은 진짜 삼각형이다.

(p, q_1)과 (p, q_2)가 $(*)$를 만족하므로, 소문항 (i)에 의해 변 PQ_1과 PQ_2는 원에 접한다.

> ? **생각해 보기** q_1과 q_2를 직접 구하지 않고서 세 번째 변 Q_1Q_2가 접선임을 어떻게 보일 수 있을까?

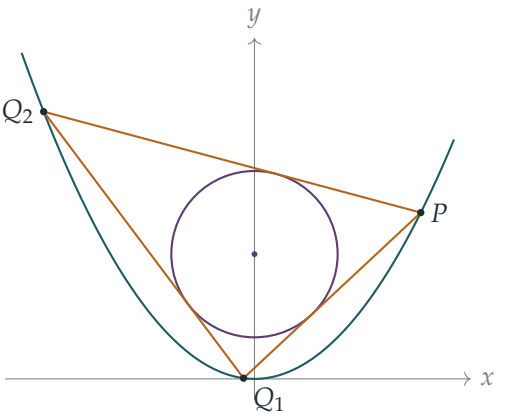
소문항 (i)의 거꾸로도 성립하는 논증에 의해 (p, q를 q_1, q_2로 바꾸면) Q_1Q_2가 접선일 필요충분조건은

$$(q_1+q_2)^2 = q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5,$$

이고, 양변은 이미 알고 있는 $s = q_1 + q_2$와 $t = q_1 q_2$만으로 이루어져 있다. 양변에 $(1-p^2)^2$을 곱하자. 좌변은 $16p^2$이 된다. 우변은

$$\begin{aligned}&(p^2-5)^2 + 6(p^2-5)(1-p^2) + 5(1-p^2)^2\\ &\quad = (p^4 - 10p^2 + 25) + (-6p^4 + 36p^2 - 30) + (5p^4 - 10p^2 + 5)\\ &\quad = 16p^2.\end{aligned}$$

이 된다. 양변이 일치하므로 Q_1Q_2도 원에 접하고, PQ_1Q_2가 구하는 삼각형이다.



그림은 $a = 1$, $p = 2$인 경우로, 이때 $q_{1,2} = \frac{1}{3}(-4 \pm \sqrt{13})$이다.

검산

- $a = 1$, $p = 2$로 두면 이차방정식은 $3q^2 + 8q + 1 = 0$이고, $q_1 + q_2 = -\frac{8}{3} = \frac{4p}{1-p^2}$, $q_1 q_2 = \frac{1}{3} = \frac{p^2-5}{1-p^2}$이다. 그러면 $(q_1+q_2)^2 = \frac{64}{9}$이고 $q_1^2 q_2^2 + 6q_1q_2 + 5 = \frac{1}{9} + 2 + 5 = \frac{64}{9}$이므로, 소문항 (iii)에서 요구하는 대로이다.
- 수치적으로 $q_1 \approx -0.1315$, $q_2 \approx -2.5352$일 때 세 변을 품은 직선은 모두 $(0,3)$에서 거리 2.000에 있다. 무작위로 고른 수천 개의 a와 p에 대해 컴퓨터로 확인한 결과도 약 10^{-13}의 오차 범위에서 일치하였다.
- 제외된 경우 $p = \pm 1$은 시사하는 바가 크다. $p = 1$이면 이차방정식이 $-4q - 4 = 0$으로 퇴화(degenerate)하여 $q = -1$ 하나만 나온다. $P(2a, a)$에서 그은 "사라진" 접선은 수직선 $x = 2a$인데, 이 직선은 원에 접하지만 포물선과는 P에서만 만난다.

흔한 실수

- 거리 공식에서 절댓값을 빠뜨리거나, 양변이 양수임을 언급하지 않고 제곱하는 것.

- 소문항 (i)의 "이면" 방향만 사용하는 것. 소문항 (iii)에서는 Q_1Q_2가 접한다는 사실을 대수적 조건으로 바꾸기 위해 역이 필요하므로, 각 단계가 거꾸로도 성립한다는 점을 밝혀야 한다.
- 삼각형이 퇴화하지 않도록 $q_1, q_2 \neq p$임을 확인하지 않는 것.

STEP 너머

이것은 **퐁슬레의 포리즘**(*Poncelet's porism*)의 한 예이다. 한 원뿔곡선(conic)에 내접하면서 다른 원뿔곡선에 외접하는 삼각형이 하나 존재하면, 그러한 삼각형을 첫 번째 원뿔곡선의 **어느** 점에서 출발해서도 만들 수 있다. 여기서는 포물선과 원이 그러한 쌍이고, 소문항 (iii)은 비에트 공식(Vieta's formulas)으로 삼각형이 닫힌다는 것을 직접 증명한다. 일반적인 증명은 사영기하학(projective geometry)을 사용하며, 가장 우아하게는 타원곡선(elliptic curves)을 사용한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이런 매개변수 원뿔곡선 기하 스타일의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.