풀이

STEP II 2023, 문제 9

역학 • 비탈면 위의 연결된 입자

STEP II 2023, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

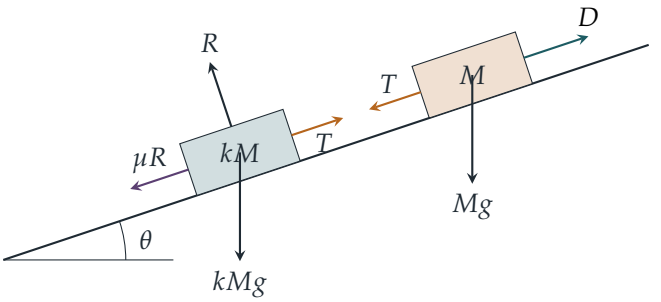
핵심 아이디어

세 가지 상황 각각에서 트럭과 트레일러에 대해 따로 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 세운다. 비탈을 내려가는 것은 각이 $-\alpha$인 비탈을 올라가는 것과 같으므로, 한 벌의 방정식으로 세 경우를 모두 다룰 수 있다. 트럭의 방정식 하나만으로도 (i)의 관계식이 거의 저절로 나온다. (ii)는 결국 $1-\cos\alpha$와 $\sin\alpha$를 비교하는 문제로 귀결된다.

풀이

트럭과 트레일러를 운동 방향을 따라 놓인 가볍고 단단한 막대로 연결된 입자로 모형화한다. 둘 다 트럭이 가는 방향으로 움직이므로, 트레일러에 작용하는 마찰력(friction)은 운동 반대 방향으로 크기 μR만큼 작용한다. 여기서 R는 트레일러에 작용하는 수직항력(normal reaction)이다. 장력(tension) T는 트레일러를 앞으로 당기고 트럭을 뒤로 당긴다. (T가 음수로 나온다면 막대가 압축력(thrust)을 받는 것이며, 계산은 달라지지 않는다.)

비탈의 각을 θ로 두되, $\theta=\alpha$는 오르막, $\theta=0$은 평지, $\theta=-\alpha$는 내리막이 되도록 잰다.



비탈 위쪽 방향의 가속도(acceleration)를 a라 하고, 각 물체에 대해 비탈 방향으로, 그리고 트레일러에 대해서는 비탈에 수직인 방향으로($R = kMg\cos\theta$) 힘을 분해하면 다음을 얻는다.

$$\text{트럭:} \qquad D - T - Mg\sin\theta = Ma, \tag{1}$$

$$\text{트레일러:} \qquad T - kMg\sin\theta - \mu kMg\cos\theta = kMa. \tag{2}$$

(1)과 (2)를 더하면 T가 소거된다.

$$a = \frac{D}{(1+k)M} - g\sin\theta - \frac{\mu kg\cos\theta}{1+k}.$$

이를 (1)에 대입하면 $T = D - Mg\sin\theta - Ma$이므로

$$T = D - \frac{D}{1+k} + \frac{\mu kMg\cos\theta}{1+k} = \frac{kD + \mu kMg\cos\theta}{1+k}.$$

$\sin\theta$ 항이 상쇄되므로, 장력은 오직 $\cos\theta$를 통해서만 θ에 의존한다.

소문항 (i)

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$이므로 $\theta = \alpha$인 경우와 $\theta = -\alpha$인 경우의 장력은 같다.

$$T_1 = T_3 = \frac{kD + \mu kMg\cos\alpha}{1+k}, \qquad T_2 = \frac{kD + \mu kMg}{1+k}.$$

두 번째 결과를 얻으려면 세 경우의 트럭 방정식 (1)만 있으면 된다.

$$\begin{aligned} Ma_1 &= D - T_1 - Mg\sin\alpha, \\ Ma_2 &= D - T_2, \\ Ma_3 &= D - T_3 + Mg\sin\alpha. \end{aligned}$$

첫째 식과 셋째 식을 더하고 $T_3 = T_1$을 쓰면 $M(a_1 + a_3) = 2D - 2T_1$이다. 여기서 가운데 식의 두 배를 빼면

$$M(a_1 + a_3 - 2a_2) = (2D - 2T_1) - (2D - 2T_2) = 2(T_2 - T_1),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (ii)(a)

첫째 부등식. (i)에 의해 $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$는 $T_2 > T_1$과 동치이다($M > 0$이므로). 위의 식들로부터

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu kMg\,(1 - \cos\alpha)}{1+k} > 0,$$

인데, 이는 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$에서 $\cos\alpha < 1$이고, 마찰이 작용하므로 $\mu > 0$이기 때문이다. 따라서 $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$이다.

둘째 부등식. $\frac{1}{2}(a_1 + a_3) < a_3$는 $a_1 < a_3$과 동치이다. a에 대한 식에서 D 항과 마찰 항은 $\theta = \pm\alpha$에서 같으므로

$$a_3 - a_1 = 2g\sin\alpha > 0.$$

(같은 이야기로, $T_1 = T_3$을 이용해 트럭 방정식끼리 빼면 $M(a_3 - a_1) = 2Mg\sin\alpha$이다.) 따라서

$$a_2 < \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) < a_3.$$

소문항 (ii)(b)

a에 대한 식에 $\theta = 0$과 $\theta = \alpha$를 넣으면

$$a_2 - a_1 = g\sin\alpha - \frac{\mu k g\,(1-\cos\alpha)}{1+k} = g\left[\sin\alpha - \frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha)\right].$$

> **생각해 보기** 오르막을 오르면 가속도가 $g\sin\alpha$만큼 줄어들지만, 수직항력이 줄어드는 덕분에 마찰도 어느 정도 줄어든다. 어느 효과가 더 클까?

마찰이 줄어드는 효과가 더 작다. 먼저 $\dfrac{k}{1+k} < 1$이고 $\mu < 1$이므로 $0 \le \dfrac{\mu k}{1+k} < 1$이다. 다음으로 반각 공식(half-angle formulae)을 쓰면

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

이므로, $0 < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{4}\pi$에서 $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha < 1$이다. 그러므로

$$\frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha) < 1 - \cos\alpha < \sin\alpha,$$

이며, $1 - \cos\alpha > 0$이므로 첫째 부등식은 등호 없이 성립한다. 따라서 $a_2 - a_1 > 0$, 즉 $a_1 < a_2$이다. $\mu < 1$이라는 조건은 바로 여기서 쓰인다. 트레일러가 매우 무겁고 μ가 크며 비탈이 가파르면, 마찰이 줄어드는 효과가 $g\sin\alpha$를 넘어설 수도 있다.

검산

- $M = 1000\,\mathrm{kg}$, $k = 0.5$, $\mu = 0.4$, $\alpha = 30^\circ$, $D = 5000\,\mathrm{N}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두자. 그러면 $a_1 \approx -2.698$, $a_2 \approx 2.027$, $a_3 \approx 7.102\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이고, $T_1 = T_3 \approx 2798\,\mathrm{N}$, $T_2 \approx 2973\,\mathrm{N}$이다. 실제로 $\frac{1}{2}(a_1 + a_3) \approx 2.202$는 a_2와 a_3 사이에 엄격하게 놓이며, $a_1 < a_2$이다. $\mu < 1$인 무작위 매개변수 조합 여러 개에 대해 컴퓨터로 확인한 결과, 모든 항등식과 부등식이 성립했다.

- $\mu = 0$이면 모든 비탈에서 장력은 $kD/(1+k)$이고, a_2는 정확히 a_1과 a_3의 평균이다. (ii)(a)에 마찰이 꼭 있어야 하는 이유가 이것이다.
- $\mu = 3, k = 100, \alpha = 1.5$라디안이면 $a_1 > a_2$이므로, (b)의 조건 $\mu < 1$은 정말로 중요하다.

흔한 실수

- 비탈에서의 마찰력을 μkMg로 쓰는 것. 비탈에서의 수직항력은 $kMg\cos\alpha$이며, 이 차이가 소문항 (ii)의 핵심 전부이다.
- 내리막에서 무게 성분의 부호를 잘못 잡는 것. 모든 것을 θ로 쓴 뒤 $\theta = -\alpha$를 대입하면 이 실수를 피할 수 있다.
- (ii)(b)에서 $1-\cos\alpha$와 $\sin\alpha$를 비교하지 않고 $\mu k/(1+k) < 1$이라는 사실만 내세우는 것. 두 사실이 모두 필요하다.

STEP 너머

계를 여러 물체로 나누고 각각에 뉴턴의 법칙을 적용하되, 내력(internal force)이 크기가 같고 방향이 반대인 쌍으로 나타나게 하는 것은 강체(rigid-body) 역학과 다입자 역학의 기본 방법이다. 방정식들을 더하면 질량중심(centre of mass)의 운동이 나오고, 내력은 사라진다. 또한 부등식 $1-\cos\alpha < \sin\alpha$는 반각 항등식을 이용해 함수를 비교하는 작은 예이기도 한데, 이 기법은 해석학 전반에서 유용하다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 생각들을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.