풀이

STEP II 2023, 문제 8

순수수학 • 3차원 벡터

> **STEP II 2023, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

세 쌍의 마주 보는 모서리(opposite edges)에 이름을 붙이면 소문항 (i)은 세 개의 일차방정식(linear equations)이 된다. 그다음부터는 $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$를 이용해 각 길이 조건을 내적(dot product)으로 바꾸기만 하면 모든 것이 따라 나온다. 세 내적 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$를 모두 $|\mathbf{a}|^2$, $|\mathbf{b}|^2$, $|\mathbf{c}|^2$로 나타내고 나면, 소문항 (iii)과 (iv)는 괄호를 전개하는 일에 불과하다.

풀이

소문항 (i)

사면체(tetrahedron)를 $OABC$라 하자. 여섯 개의 모서리는 꼭짓점을 공유하지 않는 모서리 쌍 세 개로 나뉜다.

$$OA\text{와}BC, \qquad OB\text{와}CA, \qquad OC\text{와}AB.$$

$OA = p$, $BC = p'$, $OB = q$, $CA = q'$, $OC = r$, $AB = r'$이라 하자. 네 면의 둘레(perimeter)는 다음과 같다.

$$OAB : p+q+r', \qquad OAC : p+r+q',$$
$$OBC : q+r+p', \qquad ABC : p'+q'+r'.$$

사면체가 이등변 사면체(*isosceles tetrahedron*)**이면** $p = p'$, $q = q'$, $r = r'$이고, 네 둘레는 모두 $p+q+r$과 같다.

역으로, 네 둘레가 모두 같다고 하자. $X = p - p'$, $Y = q - q'$, $Z = r - r'$이라 놓는다. 처음

세 면을 각각 ABC와 비교하면

$$(p+q+r')-(p'+q'+r')=X+Y=0,$$
$$(p+r+q')-(p'+q'+r')=X+Z=0,$$
$$(q+r+p')-(p'+q'+r')=Y+Z=0.$$

세 식을 모두 더하면 $2(X+Y+Z)=0$이다. $X+Y+Z=0$에서 각 식을 차례로 빼면 $Z=0, Y=0, X=0$을 얻는다. 따라서 $p=p', q=q', r=r'$이므로 사면체는 이등변 사면체이다. 이로써 양방향이 모두 증명된다.

소문항 (ii)

$\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$이므로 조건 $OA=BC$는

$$|\mathbf{a}|^2=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$$

를 뜻하고, 이를 정리하면 요구한 대로 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2$이다.

나머지 두 쌍의 마주 보는 모서리($OB=CA$와 $OC=AB$)에 같은 논증을 적용하면

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{b}|^2,\qquad 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2.$$

를 얻는다. 이 두 식을 더하면 $|\mathbf{b}|^2$항과 $|\mathbf{c}|^2$항이 소거된다.

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=2|\mathbf{a}|^2,\quad \text{따라서}\quad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2.$$

세 내적 공식은 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 대해 대칭이므로, 같은 방법으로

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=|\mathbf{b}|^2,\qquad \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{c}|^2.$$

소문항 (iii)

$S=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2$이라 하자. 소문항 (ii)에서 얻은 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, $2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$, $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$에 대한 세 공식을 더하면, 각 길이의 제곱이 더하기 부호로 두 번, 빼기 부호로 한 번 나타나므로

$$2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=S.$$

O로부터의 거리.

$$OG^2=\tfrac{1}{16}|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=\tfrac{1}{16}(S+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}))=\tfrac{1}{16}(2S)=\tfrac{1}{8}S.$$

A로부터의 거리. 이때 $\overrightarrow{AG}=\tfrac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a})$이고,

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}|^2&=|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2-6\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})+9|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-6|\mathbf{a}|^2+9|\mathbf{a}|^2 &&\text{이용: } \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+(|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2)+3|\mathbf{a}|^2\\&=2S.\end{aligned}$$

따라서 $AG^2 = \frac{1}{16}(2S) = \frac{1}{8}S$이기도 하다.

B와 C로부터의 거리. $\mathbf{a}$에 대해 사용한 모든 사실은 $\mathbf{b}$와 $\mathbf{c}$에 대해서도 똑같이 성립하고(소문항 (ii)의 끝부분), S는 대칭적이다. 따라서 똑같은 계산으로 $BG^2 = CG^2 = \frac{1}{8}S$를 얻는다.

그러므로 G는 네 꼭짓점 모두로부터 거리 $\sqrt{S/8}$에 있다.

소문항 (iv)

제시된 벡터를 전개한다.

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 &= S - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ &= S - 2|\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} && \text{소문항 (ii)에 의해} \\ &= (|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2) + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

따라서

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 \geq 0,$$

이고, 각 BOC는 둔각(obtuse angle)이 아니다.

> **생각해 보기** 이것은 열두 개의 각 중 하나일 뿐이다. 같은 작업을 반복하지 않고 나머지 각을 모두 처리하려면 어떻게 해야 할까?

$\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{a}$와 $\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$로 같은 계산을 하면 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \geq 0$과 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$을 얻으므로, O에서의 각 중 둔각은 없다. 이등변이라는 성질은 사면체 자체의 성질이지 꼭짓점에 이름을 붙이는 방식에 달린 것이 아니므로, 어느 꼭짓점이든 O라 부를 수 있었다. 따라서 같은 논증이 A, B, C에서도 성립한다. (다른 방법으로, 모든 면의 세 변이 p, q, r이므로 네 면은 모두 합동(congruent)인 삼각형이다. 그 각들은 정확히 O에서의 세 각 BOC, COA, AOB이다.) 그러므로 한 꼭짓점에서 만나는 모서리 사이의 각 중 둔각은 하나도 없다.

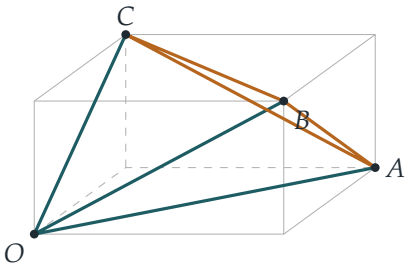
직각은? 등호 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$은 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}| = 0$, 즉 $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$일 때만 성립한다. 그런데 그러면 A는 O, B, C를 지나는 평면 위에 놓이고(실제로 $OBAC$는 직사각형이다), $OABC$는 사면체가 아니라 평평한 도형이 된다. 모든 각에서 마찬가지이므로 **어떤 각도 직각(right angle)이 될 수 없다**. 즉 진짜 이등변 사면체에서는 모든 면의 각이 예각(acute angle)이다.

검산

- 구체적인 예: 세 변의 길이가 x, y, z인 직육면체(cuboid)를 잡고, 어느 두 점도 직육면체의 모서리로 연결되지 않도록 네 꼭짓점을 고른다. 예를 들어 $O = (0,0,0)$, $A = (x,y,0)$, $B = (x,0,z)$, $C = (0,y,z)$이다. 마주 보는 모서리는 마주 보는 면의 대각선이므로 길이가 같다. $x = 1, y = 2, z = 3$이면 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 9$이고 $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c} = (0,0,-6)$이며, 실제로

$\frac{1}{4} \cdot 36 = 9$이다. 또한 $G = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$는 직육면체의 중심으로, 모든 꼭짓점으로부터 거리 $\sqrt{14}/2$에 있으며, 이는 $S = 5 + 10 + 13 = 28$일 때의 $\sqrt{S/8}$과 일치한다.

- 평평한 경우: $\mathbf{b} = (3, 0, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 4, 0)$, $\mathbf{a} = (3, 4, 0)$이면 마주 보는 "모서리"(변과 대각선)의 길이가 같고 직각을 가지는 직사각형이 된다. 이것이 바로 우리가 제외한 퇴화(degenerate) 경우이다.
- 이 항등식들은 직육면체를 바탕으로 한 수천 개의 무작위 예에서 컴퓨터로도 확인되었다.



흔한 실수

- 소문항 (i)에서 한 방향만 증명하는 것. "필요충분조건(if and only if)"은 양방향이 모두 필요하며, 실질적인 내용이 있는 쪽은 역(converse)이다.
- 소문항 (iv)에서 직각인 경우를 제대로 배제하지 않는 것. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$이면 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$가 되어 네 점이 한 평면 위에 놓인다(coplanar).
- O에서의 각만 확인하고 멈추는 것. 나머지 세 꼭짓점에서도 같은 결론이 성립하는 이유를 밝혀야 한다.

STEP 너머

위의 직육면체 그림이 이야기의 전부이다. 모든 이등변 사면체(**등면사면체**(disphenoid)라고도 한다)는 직육면체의 꼭짓점을 하나 걸러 하나씩 골라서 얻어진다. 그러면 소문항 (iii)은 무게중심(centroid)이 직육면체의 중심이라는 뜻이고, 소문항 (iv)는 직육면체의 변의 길이가 양수라는 뜻이다. 길이 조건을 내적으로, 나아가 내적들로 이루어진 **그람 행렬**(Gram matrix)로 바꾸는 것은 대학 1학년 선형대수(linear algebra)와 기하학의 표준적인 도구이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)에서 이 내용이 전개되는 과정을 살펴보기 좋다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.