풀이

STEP II 2023, 문제 7

순수수학 • 두 제곱수의 합

STEP II 2023, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.6 절 **두 제곱수의 합**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/two-squares.html

핵심 아이디어

두 제곱수의 합 x^2+y^2은 $|x+y\mathrm{i}|^2$이다. 그러면 소문항 (i)은 두 제곱수의 합 두 개를 곱한 것이 다시 두 제곱수의 합이 된다는 뜻이고, 복소수(complex number)를 곱해 보면 그것이 어떤 제곱수들인지 알 수 있다. 이후의 소문항도 모두 같은 방식으로 풀린다. 각 인수를 두 제곱수의 합으로 나타내고(대개 가까운 완전제곱수(perfect square)를 찾아서), 그것들을 곱한다. 마지막 소문항은 이 과정을 거꾸로 하여, 곱하는 대신 나눈다.

풀이

소문항 (i)

$zw=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$이므로

$$\begin{aligned}|zw|^2&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|z|^2|w|^2.\end{aligned}$$

$|zw|$와 $|z||w|$는 모두 음이 아니므로, 양변의 제곱근을 취하면 요구한 대로 $|zw|=|z||w|$를 얻는다.

이후에는 제곱한 꼴을 사용한다. z와 w의 실수부와 허수부가 정수이면

$$|z|^2\,|w|^2 = |zw|^2 = (\operatorname{Re} zw)^2 + (\operatorname{Im} zw)^2.$$

소문항 (ii)

여기서 $|2+\mathrm{i}|^2 = 4+1 = 5$이고 $|10+11\mathrm{i}|^2 = 100+121 = 221$이다. 두 수의 곱은

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20+22\mathrm{i}+10\mathrm{i}-11 = 9+32\mathrm{i},$$

이므로 소문항 (i)에 의해 $9^2+32^2 = 5\times 221$이다. (실제로 $81+1024 = 1105$이다.) 따라서 $h=9, k=32$가 조건을 만족한다.

대신 $10-11\mathrm{i}$(절댓값(modulus)이 같다)를 사용하면 $(2+\mathrm{i})(10-11\mathrm{i}) = 31-12\mathrm{i}$이므로, $h=31, k=12$도 조건을 만족한다.

소문항 (iii)

이 수는 5로 끝나므로 $8045 = 5\times 1609$이고, 앞에서처럼 $5 = |2+\mathrm{i}|^2$이다. 이제 1609를 두 제곱수의 합으로 나타내야 한다. 이 수는 $40^2 = 1600$보다 조금 크고, $1609-1600 = 9 = 3^2$이므로 $1609 = |40+3\mathrm{i}|^2$이다. 그러면

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 80+6\mathrm{i}+40\mathrm{i}-3 = 77+46\mathrm{i},$$

이고, 소문항 (i)에 의해

$$77^2+46^2 = 5\times 1609 = 8045.$$

따라서 $m=77, n=46$이다. (대신 $3+40\mathrm{i}$를 사용하면 $-34+83\mathrm{i}$를 얻으므로 $34^2+83^2 = 8045$도 성립한다.)

소문항 (iv)

여기서 추가된 인수는 $36 = 6^2 = |6|^2$으로, 실수 6의 절댓값의 제곱이다. $102+201\mathrm{i}$에 6을 곱하면 두 부분이 단순히 같은 배율로 커진다.

$$(6\times 102)^2+(6\times 201)^2 = 36\,(102^2+201^2) = 36\times 50805.$$

따라서 $p=612, q=1206$이다.

소문항 (v)

아이디어는 가우스 정수(Gaussian integers)를 써서 25를 $|\alpha|^2$으로 나타내는 서로 다른 방법을 찾고, 각각에 1002082의 한 가지 고정된 표현을 곱하는 것이다.

먼저 1002082는 $1001^2 = 1002001$보다 조금 크고,

$$1002082 - 1002001 = 81 = 9^2,$$

이므로 $1002082 = 1001^2 + 9^2 = |1001 + 9\mathrm{i}|^2$이다.

다음으로 $25 = |5|^2 = |3 + 4\mathrm{i}|^2 = |3 - 4\mathrm{i}|^2$이다. 이들 각각에 $1001 + 9\mathrm{i}$를 곱하면 한 쌍씩을 얻는다.

$$\begin{aligned} 5(1001 + 9\mathrm{i}) &= 5005 + 45\mathrm{i}, \\ (3 + 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} + 4004\mathrm{i} - 36 = 2967 + 4031\mathrm{i}, \\ (3 - 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} - 4004\mathrm{i} + 36 = 3039 - 3977\mathrm{i}. \end{aligned}$$

소문항 (i)에 의해 각각의 절댓값의 제곱은 25×1002082이다. 각 부분의 절댓값을 취하고 작은 것을 앞에 두면, $r < s$인 서로 다른 세 쌍은

$$(r, s) = (45,\ 5005), \qquad (2967,\ 4031), \qquad (3039,\ 3977).$$

생각해 보기 네 번째 쌍을 얻기 위해 $4 + 3\mathrm{i}$도 사용하면 왜 안 될까?

$4 + 3\mathrm{i} = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})$이고, i를 곱하는 것은 (부호를 무시하면) 실수부와 허수부를 맞바꿀 뿐이기 때문이다. 이렇게 하면 순서만 뒤바뀐 $(3039, 3977)$이 다시 나오므로 새로운 것을 얻지 못한다. 실질적으로 서로 다른 선택은 $5, 3 + 4\mathrm{i}, 3 - 4\mathrm{i}$이다.

소문항 (vi)

이제 이 방법을 거꾸로 적용한다. 다시 가까운 제곱수를 찾으면 $1002037 - 1002001 = 36 = 6^2$이므로

$$1002037 = 1001^2 + 6^2 = |1001 + 6\mathrm{i}|^2,$$

이고, 또한 $109 = 10^2 + 3^2 = |10 + 3\mathrm{i}|^2$이다. 정수 t, u에 대하여 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(t + u\mathrm{i})$로 쓸 수 있다면, 소문항 (i)에 의해

$$1002037 = 109\,(t^2 + u^2),$$

이고, 109로 나누면($109 \times 9193 = 1002037$을 이용하여) $t^2 + u^2 = 9193$을 얻는다.

그래서 분모와 분자에 켤레복소수(conjugate) $10 - 3\mathrm{i}$를 곱하여 나눗셈을 한다.

$$\begin{aligned} \frac{1001 + 6\mathrm{i}}{10 + 3\mathrm{i}} &= \frac{(1001 + 6\mathrm{i})(10 - 3\mathrm{i})}{109} = \frac{10010 - 3003\mathrm{i} + 60\mathrm{i} + 18}{109} \\ &= \frac{10028 - 2943\mathrm{i}}{109} = 92 - 27\mathrm{i}, \end{aligned}$$

$109 \times 92 = 10028$이고 $109 \times 27 = 2943$이기 때문이다. 나눗셈이 나누어떨어지므로 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(92 - 27\mathrm{i})$이고, 따라서

$$92^2 + 27^2 = 9193.$$

그러므로 $t = 92$, $u = 27$이다. 검산해 보면 $8464 + 729 = 9193$이다.

? **생각해 보기** 나눗셈이 나누어떨어지지 않았다면 어떻게 할까?

그렇다면 다른 켤레복소수를 시도한다. 대신 $10 - 3\mathrm{i}$로 나누면 $(9992 + 3063\mathrm{i})/109$가 되는데, 이것은 가우스 정수가 아니다($9992$는 109의 배수가 아니다). 109는 소수(prime)이므로 두 선택 중 하나는 반드시 성공한다. 이것이 아래 STEP 너머에서 언급하는 가우스 정수에 관한 사실이다. $1001 - 6\mathrm{i}$를 나누면 새로운 것은 없고 이들의 켤레복소수만 나온다.

검산

각 답은 직접 계산하여 확인할 수 있다. $9^2 + 32^2 = 1105 = 5 \times 221$; $77^2 + 46^2 = 5929 + 2116 = 8045$; $612^2 + 1206^2 = 1828980 = 36 \times 50805$; (v)에서는 $45^2 + 5005^2$, $2967^2 + 4031^2$, $3039^2 + 3977^2$이 모두 25052050과 같다; 그리고 $92^2 + 27^2 = 9193$이다. 컴퓨터로 탐색해 보면 이 결과들이 확인되며, 25×1002082는 실제로 $0 < r < s$인 표현을 여섯 개 가진다는 것도 알 수 있다(나머지 셋은 $(721, 4953)$, $(2079, 4553)$, $(2395, 4395)$이다). 이들은 1002082 자체의 두 번째 표현에서 나오므로, 서로 다른 세 쌍이면 어느 것이든 답으로 인정된다. 마찬가지로 $9193 = 48^2 + 83^2$도 성립한다.

흔한 실수

- (v)에서 $(3 + 4\mathrm{i})$와 $(4 + 3\mathrm{i})$가 서로 다른 쌍을 준다고 세는 것. 이 둘은 순서만 반대인 같은 쌍을 준다.
- (vi)에서 잘못된 켤레복소수로 나누어 정수가 아닌 결과를 얻고 포기하는 것. 다른 쪽을 시도해 보라.
- 곱을 전개할 때 $\mathrm{i}^2 = -1$에서 부호를 틀리는 것. 최종 제곱수의 합은 항상 직접 확인하라.

STEP 너머

a, b가 정수인 수 $a + b\mathrm{i}$들은 **가우스 정수**를 이루며, 이는 보통의 정수처럼 소인수분해(prime factorisation)가 유일한 환(ring)이다. $p \equiv 1 \pmod 4$인 보통의 소수는 $(x + y\mathrm{i})(x - y\mathrm{i})$로 분해되는데, 이것이 페르마(Fermat)의 두 제곱수 정리(two-squares theorem)이다. 이 인수들을 나누어 배분하는 방법의 수를 세면 어떤 수가 정확히 몇 개의 표현을 가지는

지, 그리고 왜 1002082가 우리가 사용한 하나보다 많은 표현을 가지는지 설명할 수 있다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 두 제곱수의 합을 아름답게 다루고, Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 가우스 정수를 환으로서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.