풀이

STEP II 2023, 문제 6

순수수학 • 피보나치 행렬 항등식

> **STEP II 2023, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

피보나치 수(Fibonacci numbers)를 하나의 2×2 행렬(matrix)의 거듭제곱의 성분으로 묶어 놓으면, 피보나치 수에 관한 모든 항등식은 $\mathbf{Q}$의 거듭제곱에 관한 항등식이 되고, 여기서는 평범한 대수(지수 법칙(index laws), 행렬식(determinant), 이항정리(binomial theorem))가 일을 해 준다. 각 문항은 같은 방법을 따른다. 같은 행렬을 두 가지 방법으로 쓴 다음, 한 성분을 읽어 낸다. 거의 언제나 그 성분은 오른쪽 위 성분이며, 이것이 바로 F_n이다.

풀이

행렬 공식

$n = 1$일 때 좌변은 $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}$이다. $F_2 = F_1 + F_0 = 1$이기 때문이다. 따라서 $n = 1$일 때 결과가 성립한다.

어떤 $n \geq 1$에 대하여 성립한다고 가정하자. 그러면

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

이며, 여기서 점화식(recurrence)을 두 번 사용하였다. 이것은 n을 $n+1$로 바꾼 공식이므로, 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

소문항 (i)

행렬식은 곱을 보존하므로 $\det(\mathbf{Q}^n) = (\det \mathbf{Q})^n = (0-1)^n = (-1)^n$이다. 같은 행렬식을 성분으로부터 계산하면

$$\det(\mathbf{Q}^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

이므로 요구된 대로 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$이다. (이것은 카시니 항등식(Cassini's identity)이다.)

소문항 (ii)

지수 법칙에 의하여 $\mathbf{Q}^{m+n} = \mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$이다.

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

곱의 오른쪽 위 성분은 $\mathbf{Q}^m$의 첫째 행과 $\mathbf{Q}^n$의 둘째 열의 곱, 곧 $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$이다. 오른쪽 위 성분을 비교하면

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

을 얻는다.

소문항 (iii)

직접 계산하면

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}.$$

이다. (이것은 황금비(golden ratio)가 만족하는 방정식 $x^2 = 1 + x$의 행렬 버전이다.)

아래 문항들에서, $\mathbf{Q}^k$의 오른쪽 위 성분은 모든 $k \geq 1$에 대하여 F_k이고, $k = 0$일 때도 마찬가지임에 주목하자. $\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}$의 오른쪽 위 성분은 $0 = F_0$이기 때문이다. 행렬의 합에서 오른쪽 위 성분을 취하는 것은 선형(linear)이므로, $\sum c_k\mathbf{Q}^k$의 오른쪽 위 성분은 $\sum c_kF_k$이다.

(a) $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$와 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$로 둔 이항정리를 사용하면

$$\mathbf{Q}^{2n} = (\mathbf{Q}^2)^n = (\mathbf{I} + \mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k.$$

이다. 좌변의 오른쪽 위 성분은 F_{2n}이고, 우변의 오른쪽 위 성분은 $\sum_k \binom{n}{k} F_k$이다. 따라서 $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$이다.

(b) 먼저 같은 방식으로 $\mathbf{Q}^3$을 구한다.

$$\mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} + \mathbf{I} + \mathbf{Q} = \mathbf{I} + 2\mathbf{Q}.$$

이제 $\mathbf{A} = 2\mathbf{Q}$로 두고 이항정리를 적용하면

$$\mathbf{Q}^{3n} = (\mathbf{I} + 2\mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \mathbf{Q}^k,$$

이고, 오른쪽 위 성분을 비교하면 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k$를 얻는다.

둘째 항등식을 위해 $\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q}^{2n}$으로 쓰고 (a)의 전개를 사용하면

$$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k}.$$

이다. $\mathbf{Q}^{n+k}$의 오른쪽 위 성분은 F_{n+k}이므로 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n+k}$이다.

(c)

? **생각해 보기** 부호 $(-1)^{n+k}$가 나오게 하려면 어떤 행렬을 n제곱해야 할까?

부호 $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$는 $(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n$을 전개할 때 나타나는 것이다. 사용이 허용된 이항정리의 꼴에 맞추기 위해 $\mathbf{Q} - \mathbf{I} = -(\mathbf{I} + (-\mathbf{Q}))$로 쓰면

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = (-1)^n (\mathbf{I} + (-\mathbf{Q}))^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k.$$

이다. 양변에 $\mathbf{Q}^n$을 곱하면

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k} = \mathbf{Q}^n (\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = (\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}))^n,$$

이다. 마지막 단계가 허용되는 것은 $\mathbf{Q}$와 $\mathbf{Q} - \mathbf{I}$가 교환 가능(commute)하기 때문이며(둘 다 $\mathbf{Q}$에 대한 다항식(polynomial)이다), 따라서 인수들을 다시 묶을 수 있다. 그런데 (iii)에 의하여 $\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = \mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} = \mathbf{I}$이므로 전체 합은 $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$와 같다.

$\mathbf{I}$의 오른쪽 위 성분은 0이고, 좌변의 오른쪽 위 성분은 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k}$이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k} = 0.$$

이다. 덤으로, 왼쪽 위 성분을 비교하면 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k+1} = 1$을 얻는다.

검산

- (i)에서 $n = 5$: $F_6 F_4 - F_5^2 = 8 \cdot 3 - 25 = -1 = (-1)^5$.
- (ii)에서 $m = 3, n = 4$: $F_4 F_4 + F_3 F_3 = 9 + 4 = 13 = F_7$.
- (a)에서 $n = 4$: $0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 21 = F_8$.

- (b)에서 $n = 3$: $3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 34 = F_9$이고, 또한 $F_3 + 3F_4 + 3F_5 + F_6 = 2 + 9 + 15 + 8 = 34$.
- (c)에서 $n = 3$: $-F_3 + 3F_4 - 3F_5 + F_6 = -2 + 9 - 15 + 8 = 0$.

다섯 항등식 모두 59 이하의 모든 n에 대하여(그리고 (ii)에서는 49 이하의 모든 m, n에 대하여) 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)에서 엉뚱한 성분을 비교하거나 행과 행을 곱하면 그럴듯해 보이지만 틀린 공식이 나온다. $\mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$의 오른쪽 위 성분은 $\mathbf{Q}^m$의 첫째 행과 $\mathbf{Q}^n$의 둘째 열을 사용한다.
- 교환 가능하지 않은 행렬에 대하여 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n$의 이항정리를 사용하는 실수. 여기서는 모든 행렬이 $\mathbf{Q}$에 대한 다항식이므로 모두 교환 가능하지만, 이 점을 밝혀 둘 가치가 있다.
- $k = 0$인 항을 빠뜨리는 실수. 이 항은 $\mathbf{I}$를 더하며, 그 오른쪽 위 성분은 $F_0 = 0$이다.

STEP 너머

관계식 $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$는 $\mathbf{Q}$에 대한 케일리-해밀턴 정리(Cayley–Hamilton theorem)이다. 모든 정사각행렬은 자기 자신의 특성방정식(characteristic equation)을 만족하며, 여기서 그 방정식은 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$이다. 고윳값(eigenvalues)이 $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$인 $\mathbf{Q}$를 대각화(diagonalising)하면 F_n에 대한 비네(Binet)의 닫힌 공식을 얻고, 행렬의 거듭제곱은 반복제곱(repeated squaring)으로 F_n을 빠르게 계산하는 방법도 제공한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 고윳값을 소개할 때 피보나치 수를 정확히 이런 방식으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.