풀이

STEP II 2023, 문제 5

순수수학 • 점화식과 수렴

> **STEP II 2023, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.7 절 **여섯 자리인가, 육백 자리인가**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/newton-speed.html

핵심 아이디어

두 점화식(recurrence)은 모두 $\sqrt{2}$를 근사하는 장치이고, 이 문제는 오차(error)가 얼마나 빠르게 줄어드는지를 묻는다. 각 소문항의 요령은 오차를 올바른 방식으로 재는 것이다. (i)에서는 $x_n^2 - 2$를 보는데, 이 값은 매 단계마다 크기가 최대 $\frac{1}{4}$인 인수가 곱해진다(그리고 부호가 바뀐다). (ii)에서는 $y_n - \sqrt{2}$를 보는데, 이 값은 매 단계마다 (대략) **제곱**된다. 상수를 곱하면 꾸준히 나아갈 뿐이지만, 제곱하면 맞는 자릿수가 매번 두 배가 된다. 그래서 (ii)는 같은 열 단계 만에 10^{-600}에 도달한다.

풀이

소문항 (i)

(a) 점화식을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$x_{n+1} = \frac{(x_n + 1) + 1}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1}.$$

$x_0 = 1 \geq 1$이다. $x_n \geq 1$이면 $x_n + 1 > 0$이므로 $\frac{1}{x_n+1} > 0$이고 $x_{n+1} > 1$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의해 모든 n에 대하여 $x_n \geq 1$이다.

(b) 모두 통분(common denominator)한다.

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2 &= \frac{(x_n+2)^2 - 2(x_n+1)^2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{-(x_n^2-2)}{(x_n+1)^2}. \end{aligned}$$

분모가 양수이므로 $x_{n+1}^2 - 2$와 $x_n^2 - 2$는 부호가 반대이다. (둘 다 결코 0이 되지 않는다. 귀납법에 의해 모든 x_n은 유리수(rational)이고, $\sqrt{2}$는 무리수(irrational)이기 때문이다.)

절댓값(modulus)을 취하고, (a)에서 얻은 $x_n + 1 \geq 2$, 곧 $(x_n+1)^2 \geq 4$를 이용하면

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n+1)^2} \leq \tfrac{1}{4}|x_n^2 - 2|,$$

이므로 증명하려던 식을 얻는다.

(c) $x_0^2 - 2 = -1$이므로 (b)를 열 번 적용하면

$$|x_{10}^2 - 2| \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{10} |x_0^2 - 2| = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576} < 10^{-6}.$$

부호를 보자. $x_0^2 - 2 < 0$이고 부호가 매 단계마다 바뀌므로, 짝수인 모든 n에 대하여 $x_n^2 - 2$는 음수이다. 특히 $x_{10}^2 - 2 < 0$이므로

$$-10^{-6} < x_{10}^2 - 2 < 0, \qquad \text{즉,} \qquad 2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2.$$

소문항 (ii)

(a) 먼저 모든 y_n은 양수이다. $y_0 = 1 > 0$이고, $y_n > 0$이면 $y_{n+1} = \frac{y_n^2+2}{2y_n} > 0$이다. 따라서 점화식에서 0으로 나누는 일은 생기지 않는다. 이제

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{\left(y_n - \sqrt{2}\right)^2}{2y_n},$$

인데, 이는 $(y_n - \sqrt{2})^2 = y_n^2 - 2\sqrt{2}\,y_n + 2$이기 때문이다. 이것이 구하는 항등식이다.

이로부터 결론을 끌어내자. $y_0 = 1$이다. $n \geq 1$이면 ($n-1$에 적용한) 항등식에 의해 $y_n - \sqrt{2}$는 제곱수를 양수 $2y_{n-1}$로 나눈 값이므로 $y_n - \sqrt{2} \geq 0$이고, 따라서 $y_n \geq \sqrt{2} > 1$이다. 그러므로 모든 $n \geq 0$에 대하여 $y_n \geq 1$이다.

(b) $e_n = y_n - \sqrt{2}$, $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$로 놓는다. (a)에 의해 $n \geq 1$이면 $e_n \geq 0$이고, $y_n \geq 1$이므로

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2y_n} \leq \frac{e_n^2}{2}.$$

$n \geq 1$에 대하여 $e_n \leq 2r^{2^n}$임을 귀납법으로 증명한다.

기저 단계(*base case*) $n = 1$. $y_1 = \frac{3}{2}$이므로 $e_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$이고, 한편

$$2r^2 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

따라서 부등식이 등호로 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $0 \leq e_n \leq 2r^{2^n}$이라고 가정하자.

> **생각해 보기** $e_n \leq 2r^{2^n}$의 양변을 제곱해도 되는 이유는 무엇인가?

제곱은 **음이 아닌** 수 사이의 부등식을 보존하는데, $e_n \geq 0$이 바로 (a)에서 얻은 사실이다. (이 때문에 부등식이 $n = 0$이 아니라 $n = 1$에서 시작한다. $e_0 = 1 - \sqrt{2}$는 음수이다.) 따라서

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{\left(2r^{2^n}\right)^2}{2} = \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}},$$

이고, 이로써 귀납법이 완성된다.

(c) 하한 $y_{10} \geq \sqrt{2}$는 (a)에서 보였다. 상한을 보자. $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$에서 $0 < r < \frac{1}{4}$이므로 (b)에 의해

$$y_{10} - \sqrt{2} \leq 2r^{2^{10}} = 2r^{1024} < 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^{1024} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

이를 10의 거듭제곱과 비교하기 위해 $2^{10} = 1024 > 10^3$을 이용한다.

$$2^{2047} > 2^{2040} = \left(2^{10}\right)^{204} > \left(10^3\right)^{204} = 10^{612} > 10^{600}.$$

따라서 $y_{10} - \sqrt{2} < 2^{-2047} < 10^{-600}$이고, 종합하면

$$\sqrt{2} \leq y_{10} \leq \sqrt{2} + 10^{-600}.$$

> **생각해 보기** (ii)의 놀라운 속도는 어디에서 오는가?

(i)에서는 오차에 매번 최대 $\frac{1}{4}$가 곱해지므로 열 단계로 소수점 아래 약 여섯 자리만 얻는다. (ii)에서는 오차가 매번 (대략) 제곱되므로 지수 2^n이 두 배씩 커진다. 열 단계면 약 $\frac{1}{10}$이던 오차가 10^{-600} 아래로 내려간다.

검산

- 처음 몇 항은 $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{7}{5}$, $x_3 = \frac{17}{12}$이고, $x_n^2 - 2$는 -1, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{25}$, $\frac{1}{144}$로 진행한다. 부호가 번갈아 바뀌고, 매번 적어도 4배씩 줄어든다.

- 분수로 정확히 계산하면 $x_{10}^2 \approx 2 - 3.0 \times 10^{-8}$이며, 구간 $[2 - 10^{-6}, 2]$ 안에 넉넉히 들어간다.
- $y_2 = \frac{17}{12}$이므로 $y_2 - \sqrt{2} \approx 0.00245$이고, 상한 $2r^4 \approx 0.00368$보다 작다. 정확한 분수로 컴퓨터 계산을 하면 $y_{10} - \sqrt{2} \approx 10^{-783}$이며, 보장된 $2^{-2047} \approx 10^{-616}$보다 훨씬 작다.

흔한 실수

- (i)(c)에서 부호를 잊는 것. 절댓값 부등식만으로는 $2 - 10^{-6} \le x_{10}^2 \le 2 + 10^{-6}$을 얻을 뿐이다. 상한 2를 얻으려면 부호가 번갈아 바뀐다는 사실이 필요하다.
- $e_n \ge 0$임을 먼저 알지 못한 채 $e_n \le 2r^{2^n}$을 제곱하는 것.
- 2^{-2047}에서 멈추고 실제로 10^{-600}과 비교하지 않는 것. 부등식 $2^{10} > 10^3$을 쓰는 것이 가장 깔끔하다.

STEP 너머

(ii)의 점화식은 $f(y) = y^2 - 2$에 뉴턴 방법(Newton's method)을 적용한 것이고, (ii)(a)의 항등식은 뉴턴 방법이 단근(simple root) 근처에서 **이차** 수렴(quadratic convergence)한다는 명제이다. 반면 (i)은 수렴 속도가 최대 $\frac{1}{4}$인 **선형** 수렴(linear convergence)의 예이다. 수 x_n은 또한 $\sqrt{2}$의 연분수(continued fraction)의 수렴분수(convergents)이기도 하다. 수렴 차수(order of convergence)와 고정점 반복(fixed-point iteration)은 처음 배우는 수치해석(numerical analysis) 강의의 표준 주제이며, 그 바탕이 되는 해석학은 Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)에서 꼼꼼하게 전개된다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.