풀이

# STEP II 2023, 문제 4

순수수학 • 다항식에서 무리수 근호 없애기

> **STEP II 2023, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 6.3 절 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$를 근으로 갖는 다항식에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch06/field-extensions.html

## 핵심 아이디어

방정식에서 근호(surd)를 없애려면 근호가 들어 있는 항을 모두 한쪽으로, 나머지를 모두 다른 쪽으로 모은 뒤 제곱(또는 세제곱)한다. 모든 소문항이 같은 방법을 쓴다. 수를 "다루기 쉬운 수 더하기 근호" 꼴로 쓰고, 그 근호를 따로 떼어 낸 다음, 근호가 사라질 때까지 거듭제곱한다. 전개한 뒤에도 근호가 남아 있으면 그 항들을 한쪽으로 모으고 같은 과정을 되풀이한다.

## 풀이

### 소문항 (i)

$(x-\sqrt{2})^2=3$을 전개하면 $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3$, 즉

$$x^2-1=2\sqrt{2}\,x.$$

이제 근호가 한쪽에 따로 있으므로 양변을 제곱한다.

$$x^4-2x^2+1=8x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^4-10x^2+1=0,$$

이로써 원하는 식을 얻는다. (제곱은 한 방향으로만 성립하지만, 우리에게는 그것으로 충분하다. 첫 번째 방정식을 만족하는 모든 $x$는 두 번째 방정식도 만족한다.)

결론을 이끌어 내기 위해 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$으로 놓는다. 그러면 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$이므로

$(x-\sqrt{2})^2 = 3$이고, 방금 보인 결과에 따라 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$이다.

**소문항 (ii)**

$x = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $y = x-\sqrt{5} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$으로 놓는다. 소문항 (i)에 의해 $y^4 - 10y^2 + 1 = 0$이다. 이제 이 식을 $x$로 나타낸다. 먼저

$$y^2 = (x-\sqrt{5})^2 = (x^2+5) - 2\sqrt{5}\,x,$$

이므로

$$\begin{aligned} y^4 &= (x^2+5)^2 - 4\sqrt{5}\,x(x^2+5) + 20x^2 \\ &= x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x. \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 0 &= y^4 - 10y^2 + 1 \\ &= \left(x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x\right) - 10\left(x^2 + 5 - 2\sqrt{5}\,x\right) + 1 \\ &= x^4 + 20x^2 - 24 - 4\sqrt{5}\,x^3. \end{aligned}$$

운 좋게도 $\sqrt{5}\,x$ 항이 소거된다. 근호가 들어 있는 항이 하나만 남으므로 그 항을 따로 떼어 내고 제곱한다.

$$x^4 + 20x^2 - 24 = 4\sqrt{5}\,x^3 \quad\Longrightarrow\quad (x^4 + 20x^2 - 24)^2 = 80x^6.$$

좌변을 전개하면

$$\begin{aligned} (x^4 + 20x^2 - 24)^2 &= x^8 + 40x^6 + 400x^4 - 48x^4 - 960x^2 + 576 \\ &= x^8 + 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576. \end{aligned}$$

$80x^6$을 빼면

$$g(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576,$$

으로 잡을 수 있다. 이 다항식(polynomial)은 차수(degree)가 8이고 정수 계수(integer coefficients)를 가지며, $g(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 0$이다.

? **생각해 보기** 처음부터 새로 시작하지 않고, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$에 대한 소문항 (i)을 이용해 $\sqrt{5}$를 마지막에 없애는 까닭은 무엇인가?

소문항 (i)에서 이미 세 근호 가운데 두 개를 없앴으므로, 하나만 더 처리하면 된다. 근호 하나를 제곱으로 없애면 차수가 4에서 8로 두 배가 되는데, 이것이 바로 문제에서 요구한 차수이다. 처음부터 새로 시작하면 세 근호를 한꺼번에 다루어야 한다.

### 소문항 (iii)

$x = a + \sqrt{2}$로 놓으면 $a = x - \sqrt{2}$이고 $a^3 - 3a + 1 = 0$이다. 전개하면

$$(x - \sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2},$$

이므로

$$0 = (x - \sqrt{2})^3 - 3(x - \sqrt{2}) + 1 = x^3 + 3x + 1 - \sqrt{2}\,(3x^2 - 1).$$

근호를 따로 떼어 내고 제곱한다.

$$x^3 + 3x + 1 = \sqrt{2}\,(3x^2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad (x^3 + 3x + 1)^2 = 2(3x^2 - 1)^2.$$

양변은 각각

$$(x^3 + 3x + 1)^2 = x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1,$$
$$2(3x^2 - 1)^2 = 18x^4 - 12x^2 + 2,$$

이므로

$$\mathrm{h}(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1.$$

으로 잡을 수 있다. 여기서는 $a$가 $t^3 - 3t + 1 = 0$을 만족한다는 사실만 사용했으므로, 같은 계산이 $b$와 $c$에도 그대로 적용된다. 따라서 $\mathrm{h}(a + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(b + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(c + \sqrt{2}) = 0$이다.

### 소문항 (iv)

제곱으로는 세제곱근(cube roots)을 없앨 수 없으므로 다른 항등식(identity)이 필요하다. $p = \sqrt[3]{2}$, $q = \sqrt[3]{3}$, $x = p + q$로 놓는다. 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q) = 5 + 3pq\,x.$$

**생각해 보기** 여전히 무리수(irrational)인 $pq$는 어떻게 없앨 수 있는가?

여기서 $pq = \sqrt[3]{6}$은 남아 있는 유일한 무리수이고, 인수로만 나타난다. 이것을 따로 떼어 내고 $(pq)^3 = 6$을 이용해 세제곱한다.

$$x^3 - 5 = 3pq\,x \quad \Longrightarrow \quad (x^3 - 5)^3 = 27 \cdot 6\,x^3 = 162x^3.$$

$(x^3 - 5)^3 = x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 125$이므로

$$\mathrm{k}(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125,$$

으로 잡을 수 있다. 이 다항식은 정수 계수를 가지며 $\mathrm{k}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$이다.

## 검산

- 소문항 (ii)에서 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \approx 5.38233$이다. $x^2 \approx 28.9695$이므로 $x^8 \approx 704\,310$, $40x^6 \approx 972\,485$이다. 또 $352x^4 \approx 295\,410$, $960x^2 \approx 27\,811$이고, g의 항들은 반올림 오차 범위 안에서 상쇄된다.
- $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$의 부호를 바꾸어도 $g(x)$는 전혀 변하지 않으므로, $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$ 꼴의 여덟 수가 모두 근이다. 차수가 8인 까닭이 바로 이것이다. 마찬가지로 h는 여섯 근 $a\pm\sqrt{2}$, $b\pm\sqrt{2}$, $c\pm\sqrt{2}$를 가진다.
- $t^3-3t+1=0$의 근은 $2\cos 40^\circ$, $2\cos 160^\circ$, $2\cos 280^\circ$이다. 예를 들어 $a\approx 1.53209$이면 $a+\sqrt{2}\approx 2.94630$이고, $h(2.94630)$은 반올림 오차 범위 안에서 영이다.
- 소문항 (iv)에서 $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\approx 2.70217$이고, $k(2.70217)$은 반올림 오차 범위 안에서 영이다. 컴퓨터로 확인한 결과 네 다항식 모두 약 $10^{-10}$의 정밀도로 맞았다.

## 흔한 실수

- 근호를 따로 떼어 내기 전에 제곱하는 것. $\sqrt{5}$가 들어 있는 항이 양변에 남아 있으면 소거되지 않는다.
- 소문항 (iv)에서 제곱을 시도하거나, $x^3=5+3pqx$임을 알아채지 못한 채 $x$를 세제곱하는 것. 전개식 $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$가 이 문제의 핵심 요령이다.
- 소문항 (iii)의 세제곱 전개에서, 특히 상수항 $-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$에서 부호를 틀리는 것.

## STEP 너머

정수 계수 다항식의 근이 되는 수를 **대수적 수**(*algebraic number*)라고 한다. 이 문제는 대수적 수의 합이 대수적 수임을 손으로 직접 보여 준다. 일반적인 증명은 선형대수(linear algebra)를 이용한다. $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$는 $\mathbb{Q}$ 위의 유한차원 벡터공간(finite-dimensional vector space)이다. 따라서 거듭제곱 $1, \alpha+\beta, (\alpha+\beta)^2, \ldots$은 언젠가는 일차종속(linearly dependent)이 될 수밖에 없다. 여기에 나타난 차수 4, 8, 6, 9는 이러한 **체의 확대**(*field extensions*)의 차원이다. 더 자세한 내용은 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.