풀이

STEP II 2023, 문제 3

순수수학 • 다항식과 도함수

> **STEP II 2023, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

q를 미분하면 합의 각 항이 한 칸씩 밀려날 뿐이고 마지막 도함수(derivative)는 사라지므로 $q' = q - p$이다. 이 하나의 관계식이 모든 것을 이끈다. $q > 0$에 대한 세 가지 증명(proof)은 이 관계식을 세 가지 방식으로 읽어 낸다. 하나는 정류점(stationary point)에 관한 사실로, 또 하나는 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$의 도함수, 곧 적분인자(integrating factor)로, 마지막 하나는 부분적분(integration by parts)을 거듭해서 얻는 적분 공식으로 읽는 것이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $p(x) = ax^n + \ldots$, $a \neq 0$이라 쓴다. $k \geq 1$일 때 $p^{(k)}$의 차수(degree)는 n보다 작고(또는 영함수이고), $p^{(n+1)} \equiv 0$이다.

소문항 (i)

(a) 홀수 차수의 다항식(polynomial)은 실수 직선의 한쪽 끝에서 $+\infty$로, 다른 쪽 끝에서 $-\infty$로 간다. 다항식은 연속(continuous)이므로 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 어딘가에서 값 0을 가진다. 그런데 모든 x에 대해 $p(x) > 0$이므로 p는 실근을 갖지 않고, 따라서 n은 짝수여야 한다.

또한 $a > 0$이다. 만약 $a < 0$이면 $x \to \infty$일 때 $p(x) \to -\infty$가 되어 $p > 0$에 모순이기 때문이다. $q = p + p' + \cdots + p^{(n)}$에서 첫째 항을 뺀 나머지 항은 모두 차수가 n보다 작으므로, q 역시 차수가 n이고 최고차항 계수(leading coefficient)가 $a > 0$이다. 따라서 $x \to \infty$일 때 $q(x) \to +\infty$이고 (n이 짝수이므로 $x \to -\infty$일 때도 마찬가지이다), q는 분명히 양의 값을 가진다. ($n = 0$이면 $q = p$는 양의 상수이다.)

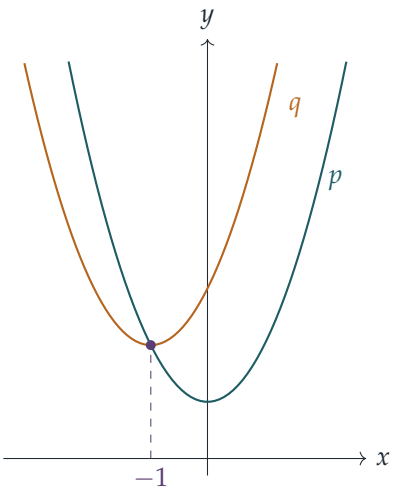
(b) 항별로 미분하면

$$q'(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} p^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) - p(x) + p^{(n+1)}(x) = q(x) - p(x),$$

이다. 차수가 n인 다항식에 대해 $p^{(n+1)} \equiv 0$이기 때문이다.

소문항 (ii)

(a) $y = q(x)$의 정류점 x_0에서 $q'(x_0) = 0$이므로, (i)(b)에 의해 $q(x_0) = p(x_0)$이다. 즉 두 곡선은 그 점에서 만난다.



(그림은 $p(x) = x^2 + 1$인 경우를 보여 준다. 이때 $q(x) = x^2 + 2x + 3$이다. q의 최솟값은 $x = -1$에서 나타나며, 바로 그곳에서 두 곡선이 만난다.)

이제 $q > 0$을 보이자. $n = 0$이면 $q = p > 0$이므로 $n \geq 2$라고 하자. (i)(a)에 의해 $x \to \pm\infty$일 때 $q(x) \to +\infty$이므로, $|x| > R$이면 언제나 $q(x) > q(0)$이 되도록 $R > 0$을 잡을 수 있다.

> **생각해 보기** q에 가장 낮은 점이 존재한다는 것, 그리고 그 점이 정류점이라는 것을 어떻게 알 수 있을까?

닫힌구간 $[-R, R]$에서 연속함수 q는 어떤 점 x_0에서 최솟값을 가지며(최대·최소 정리(extreme value theorem)), $q(x_0) \leq q(0)$이다. 이 구간 밖에서는 q가 $q(0)$보다 크므로, $q(x_0)$는 실수 전체에서 q의 최솟값이다. x_0는 $\mathbb{R}$의 내부점(interior point)이고 q는 미분가능(differentiable)하므로 $q'(x_0) = 0$이다. 앞의 결과에 의해 $q(x_0) = p(x_0) > 0$이다. 따라서 모든 x에 대해

$$q(x) \geq q(x_0) = p(x_0) > 0.$$

(b) (i)(b)를 이용하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}q(x)) = \mathrm{e}^{-x}(q'(x) - q(x)) = -\mathrm{e}^{-x}p(x) < 0$$

이 모든 x에 대해 성립한다. $p > 0$이기 때문이다. 따라서 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$는 (순)감소(strictly decreasing)한다.

$q > 0$을 보이자. q는 다항식이므로 $X \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-X}q(X) \to 0$이다(지수함수가 거듭제곱보다 빠르다). 감소함수는 $+\infty$에서의 극한보다 작아지는 일이 없으므로, 모든 X에 대해 $\mathrm{e}^{-X}q(X) \geq 0$이다. 그러면 임의의 x에 대해 순감소 성질로부터

$$\mathrm{e}^{-x}q(x) > \mathrm{e}^{-(x+1)}q(x+1) \geq 0,$$

을 얻고, 양변에 $\mathrm{e}^{x} > 0$을 곱하면 $q(x) > 0$이다.

(c) 여기 나오는 적분은 모두 수렴(converge)한다. t에 대한 다항식에 e^{-t}를 곱한 함수는 $[0,\infty)$에서 적분가능하기 때문이다. x를 상수로 보고 $u = p(x+t)$, $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$로 놓아 부분적분하면

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \Big[-p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= p(x) + \int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

이다. $t \to \infty$일 때 $p(x+t)\mathrm{e}^{-t} \to 0$이기 때문이다. 이것이 첫 번째 결과이다.

이 계산에서는 p가 다항식이라는 사실 외에는 아무것도 사용하지 않았으므로, 모든 도함수에 대해서도 같은 결과가 성립한다. 즉

$$I_k(x) = \int_0^\infty p^{(k)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{라 하면} \qquad I_k(x) = p^{(k)}(x) + I_{k+1}(x)$$

가 $k = 0, 1, \ldots, n$에 대해 성립한다. 또한 $p^{(n+1)} \equiv 0$이므로 $I_{n+1}(x) = 0$이다. 이 관계를 거듭 적용하면

$$I_0(x) = p(x) + I_1(x) = p(x) + p^{(1)}(x) + I_2(x) = \cdots = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) + I_{n+1}(x) = q(x),$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다.

생각해 보기 이 공식에서 $q(x) > 0$이 당연한 이유는 무엇일까?

고정된 각 x에 대해 피적분함수(integrand) $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$는 모든 $t \geq 0$에서 연속이고 순양수이다. $p > 0$이 모든 곳에서 성립하기 때문이다. 길이가 양수인 구간에서 연속이고 순양수인 함수의 적분은 순양수이다. 따라서 모든 x에 대해 $q(x) = I_0(x) > 0$이다.

검산

- $p(x) = x^2 + 1$이면 $q(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$이다. 실제로 $q' = 2x + 2 = q - p$이고, q의 최솟값은 $x = -1$에서 2이며, (ii)(a)가 예측한 대로 $p(-1) = 2$이다.
- 같은 p에 대해 $x = 0$에서: $\int_0^\infty (t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2! + 1 = 3 = q(0)$.
- 컴퓨터로, 차수가 6 이하이고 모든 곳에서 양수인 무작위 다항식 300개에 대해 $q' = q - p$가 정확히 성립함, $[-20, 20]$ 위의 격자에서 $q > 0$이고 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$가 감소함, 그리고 수치 적분이 $q(x)$를 유효숫자 약 10자리까지 재현함을 확인하였다.

흔한 실수

- (ii)(a)에서 근거 없이 최솟값이 존재한다고 가정하는 것. 최솟값이 존재하려면 양쪽 끝에서 $q \to +\infty$여야 하고, 여기에는 (i)(a)에서 얻은 n이 짝수라는 사실과 $a > 0$이 쓰인다.
- (ii)(b)에서 극한으로부터 $\mathrm{e}^{-x}q(x) \geq 0$만 결론짓고 마는 것. 이를 $q(x) > 0$으로 끌어올리는 것은 순감소 성질이다.
- 경계항(boundary term) $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$를 버리기 전에 $t \to \infty$일 때 이 항이 사라져야 한다는 점을 잊는 것.

STEP 너머

(ii)(b)의 함수 e^{-x}는 적분인자이고, (ii)(c)는 $q' - q = -p$를 명시적으로 푼다. 공식 $\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$는 라플라스 변환(Laplace transform) 꼴의 적분이며, D가 미분을 나타낼 때 항등식 $q = (1 + D + D^2 + \cdots)p = (1 - D)^{-1}p$는 선형 미분방정식(linear differential equation)을 위한 연산자 방법(operator method)을 처음 맛보게 해 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 적분인자와 라플라스 변환을 다루고, Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 (ii)(a)의 최댓값·최솟값 논증을 엄밀하게 만든다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.