풀이

STEP II 2023, 문제 2

순수수학 • 삼각치환

> **STEP II 2023, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

각 방정식의 우변은 익숙한 배각 공식(multiple-angle formula)이 모습을 바꾼 것이다: $t = \tan\alpha$일 때 $\frac{2t}{1-t^2}$는 $\tan 2\alpha$이고, $\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$는 $\tan 3\alpha$이며, $t = \cos\alpha$일 때 $2t^2 - 1$은 $\cos 2\alpha$이다. 치환(substitution)을 하면 서로 얽힌 세 방정식이 한 각에 대한 하나의 삼각방정식으로 바뀌는데, 이 방정식은 풀기 쉽고, 무엇보다 해의 개수를 세기 쉽다. 주의할 점은 단 하나, 치환이 모든 해를 정확히 한 번씩 잡아내는지 확인하는 것이다.

풀이

소문항 (i)

모든 실수는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 속하는 정확히 하나의 α에 대하여 $\tan\alpha$로 나타낼 수 있으므로, 그 구간의 α로 $x = \tan\alpha$라 써도 잃는 것이 없다. 첫 번째 방정식이 의미를 가지려면 $x \neq \pm 1$이어야 하고, 이는 $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}\pi$라는 뜻이므로 2α는 $\frac{1}{2}\pi$의 홀수배가 아니며, 2배각 공식(double-angle formula)을 적용할 수 있다:

$$y = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

똑같은 단계를 $y = \tan 2\alpha$에 적용하면(z가 정의되므로 $y \neq \pm 1$이다) $z = \tan 4\alpha$를 얻고, 다시 z에 적용하면($z \neq \pm 1$) $x = \tan 8\alpha$를 얻는다. 또한 $x = \tan\alpha$이므로

$$\tan\alpha = \tan 8\alpha,$$

이 되어 요구된 결과가 나온다. 두 각의 탄젠트가 같을 필요충분조건은 두 각의 차가 π의 배수인 것이므로, 어떤 정수 k에 대하여 $8\alpha = \alpha + k\pi$, 즉

$$\alpha = \frac{k\pi}{7}.$$

이다. 조건 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$는 $-\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$를 뜻하므로 $k = -3, -2, \ldots, 3$이다.

역으로, 이 일곱 개의 값은 각각 실제 해를 준다: $2\alpha = \frac{2k\pi}{7}$와 $4\alpha = \frac{4k\pi}{7}$는 결코 $\frac{1}{2}\pi$의 홀수배가 되지 않으며(그렇게 되려면 $4k$ 또는 $8k$가 7과 홀수의 곱이어야 하므로 $7 \mid k$이고, 따라서 $k = 0$인데, 이때 값은 0이 되어 홀수배가 아니다), 따라서 x, y, z 중 어느 것도 ± 1이 아니고, 모든 분모(denominator)가 0이 아니며, 위의 추론을 거꾸로 따라갈 수 있다. 서로 다른 k는 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 서로 다른 α를, 따라서 서로 다른 x를 준다. 그러므로 해는 정확히 일곱 개이다.

요구된 형태로 답을 쓰려면 $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$를 이용하여 2α와 4α를 π의 배수만큼 줄여 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 안으로 옮긴다. 예를 들어 $\tan\frac{4\pi}{7} = \tan(-\frac{3\pi}{7})$이고 $\tan\frac{8\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}$이다. $t_m = \tan\frac{m\pi}{7}$라 쓰면 해 (x, y, z)는 다음과 같다:

k	(x, y, z)
0	$(0, 0, 0)$
1	$(t_1,\ t_2,\ t_{-3})$
2	$(t_2,\ t_{-3},\ t_1)$
3	$(t_3,\ t_{-1},\ t_{-2})$

k	(x, y, z)
-1	$(t_{-1},\ t_{-2},\ t_3)$
-2	$(t_{-2},\ t_3,\ t_{-1})$
-3	$(t_{-3},\ t_1,\ t_2)$

$(0, 0, 0)$을 제외하면 해들은 (t_1, t_2, t_{-3})과 (t_{-1}, t_{-2}, t_3)의 순환(cyclic) 재배열로 나타난다는 점에 주목하자. 연립방정식이 $x \to y \to z \to x$에 대하여 변하지 않으므로 당연히 그래야 한다.

소문항 (ii)

먼저 3배각 공식(triple-angle formula)을 구하자. $t = \tan\alpha$라 하면

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{2t + t - t^3}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

앞에서와 같이 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$인 α로 $x = \tan\alpha$라 두자. 방정식들이 성립하려면 $1 - 3x^2$, $1 - 3y^2$, $1 - 3z^2$이 0이 아니어야 하며, 이 조건 아래에서 공식으로부터 차례로 $y = \tan 3\alpha$, $z = \tan 9\alpha$, $x = \tan 27\alpha$를 얻는다. 따라서 $\tan\alpha = \tan 27\alpha$이고, $26\alpha = k\pi$, 즉

$$\alpha = \frac{k\pi}{26}, \qquad -13 < k < 13.$$

이다. 이는 α의 후보값 25개이며, 모두 서로 다른 x 값을 준다.

> **생각해 보기** 이 25개의 후보 중 일부가 분모를 0으로 만들어서 실제로는 해가 아닐 수도 있지 않을까?

바로 이 점을 확인해야 한다. 분모 $1 - 3\tan^2\beta$는 $\beta \equiv \pm\frac{1}{6}\pi \pmod{\pi}$일 때 0이 되고, β가 $\frac{1}{2}\pi$의 홀수배이면 탄젠트 자체가 정의되지 않는다. 여기서 관련된 각은 $j = 0, 1, 2$에 대하여 $\beta = 3^j \cdot \frac{k\pi}{26}$이다.

- $3^j k\pi/26 = \pm\frac{1}{6}\pi + m\pi$라면 $3^{j+1}k = \pm 13 + 78m$이어야 한다. 좌변은 3의 배수이지만 우변은 그렇지 않다(78은 3의 배수이고 13은 그렇지 않으므로). 불가능하다.
- $3^j k\pi/26 = \frac{1}{2}(2m+1)\pi$라면 $3^j k = 13(2m+1)$이므로 13이 k를 나누고, 따라서 $k = 0$이다. 그런데 그러면 좌변이 0이 되어 13의 홀수배가 아니다. 불가능하다.

따라서 모든 후보가 실제 해이고, 연립방정식은 정확히 25개의 실수해를 가진다. (구간에서 제외된 값 $k = \pm 13$은 $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$에 해당하며, 이때 $\tan\alpha$는 존재하지 않는다.)

소문항 (iii)(a)

이제 $|x| \le 1$이므로 정확히 하나의 $\alpha \in [0, \pi]$에 대하여 $x = \cos\alpha$라 쓸 수 있다. 2배각 공식 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$에서 $y = \cos 2\alpha$를, 이어서 $z = \cos 4\alpha$와 $x = \cos 8\alpha$를 얻으며, 이들은 자동으로 $|y| \le 1$과 $|z| \le 1$을 만족한다. 따라서 세 값이 모두 $[-1, 1]$에 속하는 해는 $\alpha \in [0, \pi]$ 중에서 다음 조건을 만족하는 것들과 정확히 대응한다:

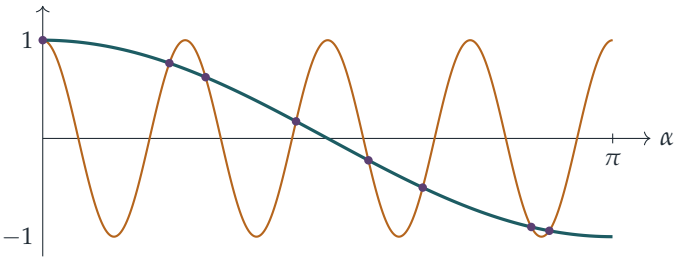
$$\cos 8\alpha = \cos\alpha.$$

두 각의 코사인이 같을 필요충분조건은 2π의 배수 차이를 무시할 때 두 각이 같거나 부호가 반대인 것이므로

$$8\alpha = \alpha + 2m\pi \quad \text{또는} \quad 8\alpha = -\alpha + 2n\pi, \qquad \text{즉} \qquad \alpha = \frac{2m\pi}{7} \quad \text{또는} \quad \alpha = \frac{2n\pi}{9}.$$

$[0, \pi]$에서 첫 번째 족은 $m = 0, 1, 2, 3$, 즉 $0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$을 주고, 두 번째 족은 $n = 0, 1, 2, 3, 4$, 즉 $0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$를 준다. 겹치는 것은 $\alpha = 0$뿐이다(공통값이 있으려면 $\frac{m}{7} = \frac{n}{9}$, 즉 $9m = 7n$이어야 하므로 $7 \mid m$이다). 그러면 서로 다른 α 값이 $4 + 5 - 1 = 8$개 남고, 코사인은 $[0, \pi]$에서 일대일(one-to-one)이므로 이들은 서로 다른 x 값 8개를 주며, 각 x가 y와 z를 결정한다. 따라서 $|x|, |y|, |z| \le 1$인 해는 정확히 8개이다.

그림은 $[0, \pi]$에서 $\cos 8\alpha$(호박색)와 $\cos\alpha$(청록색)의 여덟 교점을 보여 준다.



소문항 (iii)(b)

이제 제한을 없앤다. y와 z를 소거하자: $y = 2x^2 - 1$은 x에 대한 이차식이므로 $z = 2y^2 - 1$은 x에 대한 4차 다항식(polynomial)이고, 그러면 $x = 2z^2 - 1$은

$$x = 2\Big(2\big(2x^2 - 1\big)^2 - 1\Big)^2 - 1,$$

이 되는데, 이는 x에 대한 8차 다항방정식이다(우변의 최고차항(leading term)은 $2 \cdot (2 \cdot 2^2)^2 x^8 = 128x^8$이며, 이를 상쇄하는 항은 없다). 전개하면 다음과 같다.

$$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 - x + 1 = 0.$$

연립방정식의 모든 해 (x, y, z)에서 x는 이 8차 방정식(octic)의 근(root)이고, x가 y와 z를 결정한다. 차수가 8인 다항식은 실근을 많아야 8개 가지는데, (a)에서 이미 서로 다른 실근 8개, 즉 거기서 구한 여덟 개의 α에 대한 $\cos\alpha$를 얻었다. 따라서 이들이 근의 **전부**이며, 연립방정식의 모든 해는 (a)의 여덟 해 중 하나이다. 특히 모든 해는 $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, $|z| \le 1$을 만족하며, 이것이 보여야 할 내용이었다.

생각해 보기 (b)에서는 왜 (a)의 여덟 해만으로는 부족하고 차수가 필요할까?

(a)는 $[-1, 1]$ 안의 해만 찾았을 뿐이며, 그것만으로는 이를테면 $x = 5$에 대해서는 아무것도 말해 주지 않는다. 다른 해가 없음을 보장하는 것은 차수에 의한 상한이다: 8차 방정식이 가질 수 있는 근은 여덟 개가 전부이고, (a)가 그것을 모두 써 버렸다.

검산

- (i)에서 $k = 1$일 때: $\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$이고, $\frac{2(0.4816)}{1-0.4816^2} \approx 1.2540 = \tan\frac{2\pi}{7}$이다. 두 단계를 더 거치면 다시 0.4816으로 돌아온다.
- 컴퓨터로 실수 전체에서 $f(f(f(x))) = x$의 근을 탐색한 결과, $f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$에 대해서는 정확히 7개, $f(t) = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$에 대해서는 정확히 25개의 근이 나왔고, 후자는 $\tan\frac{k\pi}{26}$, $|k| \le 12$와 일치한다.
- (iii)에서 $x = 1$이면 $y = z = 1$로 $\alpha = 0$인 해이며, 실제로 $128 - 256 + 160 - 32 - 1 + 1 = 0$이다. 8차 방정식의 근을 $[-50, 50]$에서 탐색한 결과 정확히 8개가 나왔고, 모두 $[-1, 1]$ 안에 있었다.

흔한 실수

- (ii)에서 $k = \pm 13$을 허용하여(또는 α를 전혀 제한하지 않아서) 27개의 해를 얻는 것. $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$에 대응하는 실수 x는 없다.

- (iii)(a)에서 두 번째 족 $8\alpha = -\alpha + 2n\pi$를 빠뜨리거나, $\alpha = 0$을 두 번 세는 것.
- (i)에서 각이 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에 있어야 하는데도 $\tan\frac{4\pi}{7}$ 같은 답을 줄이지 않고 그대로 두는 것.

STEP 너머

$T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$를 만족하는 다항식 T_n을 **체비쇼프**(*Chebyshev*) **다항식**이라 한다. (iii)은 방정식 $T_8(x) = x$이고, 위의 8차 다항식은 $T_8(x) - x$이다. $x \mapsto 2x^2 - 1$ 같은 사상을 반복하면서 세 단계 뒤에 되돌아오는 점을 찾는 것은 동역학계(dynamical systems) 이론의 출발점이다: 이 사상은 $[-1, 1]$에서 "혼돈적(chaotic)"이며, 각 치환은 이를 단순한 두 배 사상 $\alpha \mapsto 2\alpha$로 바꾼다. 같은 방법으로 (i)과 (ii)의 탄젠트 사상이 왜 그렇게 많은 주기점(periodic points)을 가지는지 설명할 수 있다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에 이런 정신의 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.