풀이

# STEP II 2023, 문제 10

역학 • 포물체 궤적의 포락선

> **STEP II 2023, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

## 핵심 아이디어

궤적(trajectory)과 곡선 $E$가 **접한다**(touch)는 것은 두 곡선의 공통점을 구하는 방정식이 중근(repeated root)을 갖는다는 것과 정확히 같으므로, 소문항 (i)은 판별식(discriminant) 계산이다. 이것이 모든 각도에 대해 일어나기를 요구하면 $E$는 모든 궤적의 **포락선**(envelope), 곧 속력 $u$인 입자가 도달할 수 있는 영역의 경계가 될 수밖에 없다. 문제의 나머지 부분은 이 경계를 세 가지 관점에서 살펴본다. 어떤 점을 맞힐 수 있는가, 고정된 시각에 입자들은 어디에 있는가, 그리고 포락선 자체를 따라 미끄러지는 두 번째 입자이다.

## 풀이

풀이 전체에서 입자는 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 점으로 모형화하고, $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$로 둔다.

### 소문항 (i)

발사 후 경과한 시간을 $t$라 하면, $P_\alpha$는 평면 $y = 0$ 위에 머물며

$$x = uct, \qquad z = ust - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. $t = x/(uc)$로 시간을 소거하면 궤적은

$$z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2c^2}.$$

이다. $E$와의 공통점은 $A - Bx^2 = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2c^2}$을 만족한다. 즉

$$\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right)x^2 - x\tan\alpha + A = 0. \qquad (*)$$

이다. 만약 $x^2$의 계수가 0이라면 $\tan\alpha \neq 0$이므로 $(*)$는 일차방정식이 되어 접하는 것이 아니라 한 번 교차하게 된다. 따라서 $(*)$는 진짜 이차방정식이다. 두 곡선이 정확히 한 번 접하는 것은 $(*)$가 중근을 가질 때, 곧 판별식이 0일 때이다.

$$\tan^2\alpha = 4A\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right).$$

양변에 $u^2c^2$을 곱하면

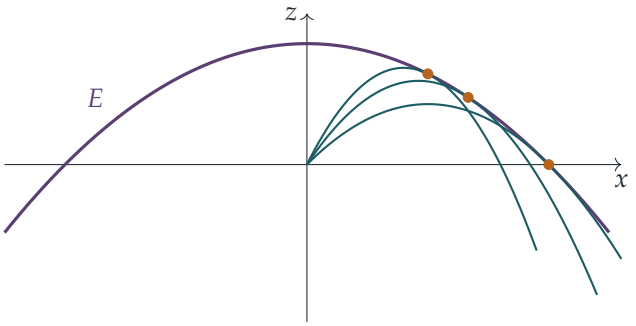
$$\begin{aligned} u^2s^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \\ u^2 - u^2c^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \qquad (s^2 = 1 - c^2\text{을 이용}) \\ u^2 - 2gA &= u^2(1-4AB)\cos^2\alpha, \end{aligned}$$

이 되어 원하는 식을 얻는다.

이 식이 $(0, \frac{1}{2}\pi)$의 모든 $\alpha$에 대해 성립한다면, 좌변은 상수인 반면 $\cos^2\alpha$는 $(0,1)$의 모든 값을 취한다. 이 모든 값에 대해 상수가 $k\cos^2\alpha$와 같으려면 $k = 0$이어야 하고, 그러면 그 상수는 0이다. 따라서 $u^2 = 2gA$이고 $4AB = 1$이다.

$$A = \frac{u^2}{2g}, \qquad B = \frac{g}{2u^2}.$$

역으로 이 값들은 모든 $\alpha$에 대해 항등식을 성립시킨다. 접점은 중근 $x = \dfrac{\tan\alpha}{2(g/(2u^2c^2) - B)} = \dfrac{u^2}{g\tan\alpha}$이다.




그림($u^2/g = 2$로 그림)은 세 궤적이 각각 호박색 점에서 $E$와 한 번씩 접하는 모습을 보여준다.

**소문항 (ii)**

모든 입자는 초기 속도를 포함하는 연직 평면 안에서 움직이며, 모든 것이 $z$축에 대해 대칭이다. 그러므로 $z$축으로부터 수평 거리가 $r$이고 높이가 $z$인 점을 잡고, 그 점을 지나는 연직 평면에서 생각한다. 이때 $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$는 그 점을 향해 수평 위로 발사한 각도이다.

$r = 0$이면 똑바로 위나 아래로 쏜 입자만 도달할 수 있다. 위로 쏜 입자는 $u^2/(2g)$ 이하의 모든 높이에 도달하고, 아래로 쏜 입자는 모든 음의 높이에 도달하므로, 축 위에서 도달 가능한 점은 $z \le u^2/(2g)$인 점들이다.

$r > 0$이면 소문항 (i)과 똑같이, $1/\cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하여 입자가 그 점을 지날 조건은

$$z = r\tan\theta - \frac{gr^2}{2u^2}(1 + \tan^2\theta),$$

이다. 임의의 실숫값을 취할 수 있는 $T = \tan\theta$로 쓰면, 이것은 이차방정식

$$\frac{gr^2}{2u^2}T^2 - rT + \left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) = 0,$$

이고, 이 방정식이 실근을 가질 필요충분조건은 $2gr^2/u^2 > 0$으로 나누어

$$r^2 \ge \frac{2gr^2}{u^2}\left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) \iff z \le \frac{u^2}{2g} - \frac{gr^2}{2u^2},$$

이다.

따라서 $r^2 = x^2 + y^2$으로 두면, 맞힐 수 있는 점은 정확히 포물면(paraboloid)

$$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g}{2u^2}(x^2 + y^2),$$

위 또는 그 아래에 있는 점들이다. 이 포물면은 (소문항 (i)의 값을 넣은) $E$를 $z$축을 중심으로 회전하여 얻은 곡면이다. 곡면보다 엄밀히 아래에 있는 점은 평면 안의 두 방향으로 도달할 수 있고, 곡면 위의 점은 정확히 한 방향(소문항 (i)의 접함에 대응하는 중근)으로, 곡면보다 위의 점은 어느 방향으로도 도달할 수 없다.

**소문항 (iii)**

입자의 초기 속도를 $u\mathbf{n}$이라 하자. 여기서 $\mathbf{n}$은 단위벡터(unit vector)이다. 시간 $t$ 후의 위치는

$$\mathbf{r} = ut\,\mathbf{n} - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k},$$

이며, $\mathbf{k}$는 위쪽을 향하는 단위벡터이다. 따라서

$$|\mathbf{r} - (-\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k})| = |ut\,\mathbf{n}| = ut.$$

이다. 그러므로 시각 $t$에 모든 입자는 중심이 $(0, 0, -\frac{1}{2}gt^2)$이고 반지름이 $ut$인 구 위에 있다. 물리적으로 보면, 중력은 모든 입자를 똑같이 가속하므로 원점에서 자유낙하하는 점에 대해 상대적으로 보면 모든 입자는 속력 $u$로 직선을 따라 바깥으로 날아간다.

**소문항 (iv)**

$Q$를 발사한 후 경과한 시간을 $\tau$라 하면, $Q$는 $y = 0$이고

$$x = u\tau, \qquad z = A - \tfrac{1}{2}g\tau^2.$$

이다. $\tau = x/u$를 대입하면

$$z = A - \frac{g}{2u^2}x^2 = A - Bx^2,$$

이다. 여기서 소문항 (i)의 $B = g/(2u^2)$을 이용하였다. 따라서 $Q$는 항상 $E$ 위에 있다.

**소문항 (v)**

$Q$를 폭발 후 시각 $T$에 발사하고, 폭발 후 시각 $t$ $(\geq T)$에 $Q$와 $P_\alpha$가 같은 점에 있다고 하자. 그러면 $\tau = t - T$이고 두 $y$좌표는 모두 0이므로, $x$좌표와 $z$좌표가 일치해야 한다.

$$uct = u(t - T),$$
$$ust - \tfrac{1}{2}gt^2 = A - \tfrac{1}{2}g(t - T)^2.$$

첫 번째 식에서 $t - T = ct$이므로 $T = t(1 - c)$이다. 두 번째 식에 $t - T = ct$를 넣고 $1 - c^2 = s^2$을 이용하면

$$ust - \tfrac{1}{2}gs^2t^2 = A = \frac{u^2}{2g}.$$

? **생각해 보기** 복잡한 공식을 쓰지 않고 이 식을 $t$에 대해 어떻게 풀 수 있을까?

$2g$를 곱하고 모든 항을 한쪽으로 모으면 $g^2s^2t^2 - 2gus\,t + u^2 = 0$이 되는데, 이것은 완전제곱식

$$(gst - u)^2 = 0, \qquad \text{따라서} \qquad t = \frac{u}{g\sin\alpha}.$$

이다. 중근이 나오는 것은 당연하다. 충돌은 $P_\alpha$의 궤적이 $E$에 접하는 곳에서 일어나야 하는데, 그곳이 두 경로가 공유하는 유일한 점이기 때문이다. 실제로 그때 $P_\alpha$는 $x = uct = u^2/(g\tan\alpha)$에 있으며, 이는 소문항 (i)에서 구한 접점이다. 그러므로

$$T = t(1 - \cos\alpha) = \frac{u(1 - \cos\alpha)}{g\sin\alpha},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. $0 < 1 - \cos\alpha < 1$이므로 $0 < T < t$이고, 따라서 $Q$는 실제로 폭발 후, 충돌 전에 발사된다.

## 검산

- 소문항 (i)에서 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$이면 접점은 $x = u^2/g, z = 0$이다. 이는 평지에서의 최대 사거리이며, 도달 가능 영역의 경계는 실제로 이 점을 지나야 한다.

- 소문항 (ii)에서 축 $r = 0$ 위의 한계는 $z \leq u^2/(2g)$로, 똑바로 위로 쏜 입자의 최고 높이이다.
- 소문항 (v)에서 $u = 7$, $g = 9.8$, $\alpha = 0.5$이면 공식은 $T \approx 0.182$를 준다. 두 운동을 시간에 따라 단계적으로 진행해 보면 입자들이 $t = u/(g\sin\alpha) \approx 1.49$에서 만나며, $Q$를 0.05만 늦게 발사해도 서로 빗나감을 확인할 수 있다.
- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$이면 $T \to u/g$이고 $t \to u/g$이다. $P_\alpha$는 거의 똑바로 위로 올라가 시각 $u/g$에 $E$의 꼭대기 $(0, 0, A)$에 도착하는데, 바로 그때 $Q$가 그곳에서 출발한다.

## 흔한 실수

- 공통점 방정식을 먼저 $x$에 대한 하나의 이차방정식으로 정리하지 않고 판별식을 0으로 놓아, $x^2$ 계수에서 $-B$ 항을 빠뜨리는 실수.
- 소문항 (ii)에서 경계 곡면만 기술하는 실수. 문제는 집합 전체를 묻고 있으며, 그것은 포물면 위와 그 아래의 입체 영역이다.
- 소문항 (v)에서 두 입자에 같은 시간 변수를 쓰는 실수. $Q$는 $t - T$ 동안만 움직였다.

## STEP 너머

곡선 $E$는 궤적들의 족의 **포락선**, 곧 족의 모든 구성원에 접하는 곡선이다. 일반적으로 족 $F(x, z, \alpha) = 0$의 포락선은 $F = 0$과 $\partial F/\partial\alpha = 0$에서 $\alpha$를 소거하여 구하며, 이것은 여기서 사용한 중근 조건의 미분 버전이다. 소문항 (ii)의 포물면은 흔히 **안전 포물면**(paraboloid of safety)이라 불리며, 소문항 (iii)은 중력이 사라지는 자유낙하 기준계(freely falling frame)로 바꾸어 보는 예이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 아이디어를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.