풀이

STEP II 2023, 문제 1

순수수학 • 치환적분

> **STEP II 2023, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2023년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

핵심 아이디어

치환(substitution) $x = 1/t$는 $\frac{1}{2}$와 2를 서로 맞바꾸므로, 구간(interval) $[\frac{1}{2}, 2]$를 (방향을 거꾸로 하여) 자기 자신 위로 옮긴다. 따라서 이 구간 위의 적분은 **같은** 구간 위에서 **겉모습이 다른** 적분으로 다시 쓸 수 있다. 새로운 피적분함수(integrand)가 곧바로 적분하기 쉬운 경우도 있고, 원래 피적분함수의 짝이 되어 둘을 더하거나 비교하는 것만으로 문제가 풀리는 경우도 있다.

풀이

소문항 (i)

$x = 1/t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$이다. $a > 0$이므로 $[a, b]$의 모든 x는 양수이고, 이에 대응하는 t도 양수이다. 그러면

$$1 + x^2 = \frac{t^2 + 1}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)^{3/2} = \frac{(1 + t^2)^{3/2}}{t^3},$$

이다. 여기서 $t > 0$이므로 $\sqrt{t^2} = t$를 이용하였다. 적분 구간의 끝 $x = a$와 $x = b$는 각각 $t = a^{-1}$과 $t = b^{-1}$이 된다. 따라서

$$\int_a^b \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{t^3}{(1 + t^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{-t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

이고, 이것이 보이려던 식이다.

소문항 (ii)

(a) $a = \frac{1}{2}, b = 2$로 두면 새로운 적분 구간의 끝은 2와 $\frac{1}{2}$이다. 위끝과 아래끝을 맞바꾸면 음의 부호가 흡수된다.

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

새로운 피적분함수는 $1+t^2$의 거듭제곱의 도함수(의 상수배)이다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)^{-1/2} = -t(1+t^2)^{-3/2}$이므로

$$\int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-(1+t^2)^{-1/2}\Big]_{1/2}^{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5/4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) 피적분함수는 우함수(even function)이므로 $[-2,2]$ 위의 적분은 $[0,2]$ 위의 적분의 두 배이다. 이 구간을 $[0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},2]$로 나누면, 두 번째 조각은 (a)에서 구한 것이다.

> **생각해 보기** 소문항 (i)에는 $a > 0$이 필요하다. 0에서 시작하는 조각은 어떻게 다룰 수 있을까?

소문항 (i)이 적용되는 $0 < a < \frac{1}{2}$에 대하여 $[a, \frac{1}{2}]$ 위에서 계산한 다음 $a \to 0^+$로 보낸다. $b = \frac{1}{2}$로 두고 소문항 (i)을 적용하면

$$\int_{a}^{1/2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{1/a} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}}}.$$

$a \to 0^+$일 때 $a^{-2} \to \infty$이므로 마지막 항은 0으로 수렴(converge)한다. 피적분함수가 그 구간에서 연속이므로 좌변은 $[0,\frac{1}{2}]$ 위의 적분으로 수렴한다. 따라서 이 조각도 $\frac{1}{\sqrt{5}}$이고,

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

소문항 (iii)

(a) $J = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$로 놓고 다시 $x = 1/t$를 적용한다. 이번에는 $(1+x^2)^2 = (1+t^2)^2/t^4$이므로

$$J = \int_{2}^{1/2} \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

이고, 적분변수(dummy variable) t를 x로 바꾸어 쓰면 이것이 첫 번째 등식이다. 이 두 번째 적분을 K라 하면 $J = K$이다. 두 피적분함수를 더하면

$$J + K = \int_{1/2}^{2} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

이고, $J = K$이므로 $J = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$를 얻어 등식의 사슬이 완성된다.

따라서

$$J = \tfrac{1}{2}(\arctan 2 - \arctan \tfrac{1}{2}).$$

이 값은 두 가지 방법으로 깔끔하게 정리할 수 있다. $\arctan 2 + \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$이므로(두 직각변의 길이가 1과 2인 직각삼각형의 두 예각은 서로 여각(complementary angles)이다) $J = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{2}$이다. 또는 tan의 덧셈정리(subtraction formula)에 의하여 $\tan(\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2}) = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$이고, 그 차는 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하므로

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{3}{4} \approx 0.3218.$$

(b) 구하려는 적분을 L이라 하자. 어려운 부정적분을 찾기 전에 한 번 더 $x = 1/t$를 시도해 본다. 피적분함수는

$$\frac{1-\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}} = \frac{t(t-1)}{\sqrt{1+t^2}}$$

이 되며, 여기서도 $t > 0$을 이용하였다. $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$를 곱하고 적분 구간이 2에서 $\frac{1}{2}$까지임에 주의하면

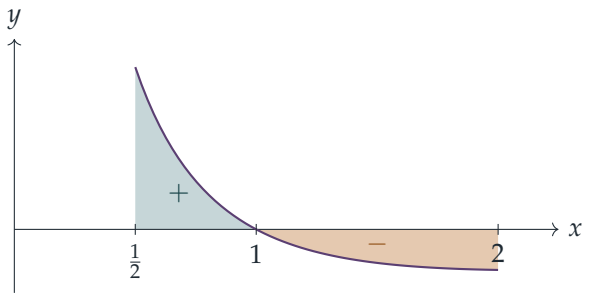
$$L = \int_{2}^{1/2} \frac{-(t-1)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t-1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{1/2}^{2} \frac{1-t}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -L.$$

? **생각해 보기** 치환으로 L이 $-L$이 되었다. 이것은 모순일까?

그렇지 않다. 이것은 단지 그 값을 알려 줄 뿐이다. $L = -L$에서 $2L = 0$이므로

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1-x}{x(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

그림도 이와 일치한다. $[\frac{1}{2}, 1]$ 위의 양의 넓이가 $[1, 2]$ 위의 음의 넓이와 정확히 상쇄되는데, $x \mapsto 1/x$가 이 두 조각을 맞바꾸고, 위의 계산에 의하여 한쪽의 넓이를 다른 쪽 넓이의 부호를 바꾼 값으로 옮기기 때문이다.



검산

- $(1+x^2)^{-3/2}$의 부정적분(antiderivative) 하나는 $x(1+x^2)^{-1/2}$이다(미분하여 확인해 보라). 이것을 쓰면 (ii)(a)는 $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$, (ii)(b)는 $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1.7889$로, 앞에서 구한 답과 일치한다.
- (iii)(a)에서 $\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} \approx 0.32175$와 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2} \approx 0.32175$는 서로 일치한다. 등식의 사슬에 있는 세 적분 모두 수치적분(numerical quadrature)을 하면 같은 값이 나온다.
- (iii)(b)에서 피적분함수는 $x < 1$에서 양수이고 $x > 1$에서 음수이므로 답이 0이라는 것은 그럴듯하다. 수치적분을 하면 반올림 오차 범위 안에서 0이 나온다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$의 음의 부호를 빠뜨리거나, 위끝과 아래끝을 맞바꾸면 그 부호가 상쇄된다는 것을 잊는 실수.
- (ii)(b)에서 $a = 0$으로 두고 소문항 (i)을 적용하는 실수. 그러면 $t = 1/0$이라는 끝값이 필요해진다. 극한(limit)을 이용하거나, 간단히 부정적분을 이용하라.
- $\sqrt{(1+t^2)/t^2} = \sqrt{1+t^2}/t$로 쓰면서 이것이 $t > 0$일 때만 성립한다는 점을 밝히지 않는 실수.

STEP 너머

사상 $x \mapsto 1/x$는 구간 $[\frac{1}{2}, 2]$의 대칭(symmetry)이며, 적분의 대칭을 활용하는 것은 $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$를 이용해 $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$를 구하는 경우처럼 거듭 등장하는 기법이다. 소문항 (ii)(b)는 이상적분(improper integral)을 처음 맛보는 셈이다. 치환이 유한한 끝점을 무한대로 보냈고, 그래서 극한을 신중하게 취해야 했다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 적분의 극한을 엄밀하게 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 STEP 유형의 적분 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.