풀이

STEP III 2022, 문제 9

역학 • 충돌과 반발계수

> **STEP III 2022, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

이 문제의 충돌은 모두 같은 충돌이다. 움직이는 입자가 k배 무거운 정지한 입자에 부딪힌다. 따라서 (i)의 처음에 구한 인수 α와 β를 B(질량 km)가 C(질량 k^2m)에 부딪히는 (ii)에서 그대로 다시 쓸 수 있다. 그다음부터 "같은 지점에서 만난다"는 조건은 모두 같은 시각을 나타내는 두 식을 서로 같게 놓는 것일 뿐이다. (ii)에서는 k와 e에 대한 방정식 두 개를 얻는데, 그중 하나는 (i)의 조건과 정확히 같다.

풀이

A, B, C를 매끄러운 면 위의 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화하고, 충돌은 순간적으로 일어난다고 한다. 모든 속도는 A가 처음 움직이는 방향을 양의 방향으로 하여 잰다.

소문항 (i)

첫 번째 충돌. 운동량(momentum)이 보존되고, 뉴턴(Newton)의 반발 법칙(law of restitution)에 따르면 멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이다.

$$mu = mv_1 + kmv_2, \qquad v_2 - v_1 = eu.$$

$v_1 = v_2 - eu$를 첫 번째 식에 대입하면 $u = v_2 - eu + kv_2$이므로

$$v_2 = \frac{1+e}{k+1}\,u = \beta u, \qquad v_1 = \frac{1+e}{k+1}\,u - eu = \frac{1+e-ek-e}{k+1}\,u = \frac{1-ke}{k+1}\,u = \alpha u,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

두 번째 충돌. 첫 번째 충돌 순간부터 시간을 잰다. B는 벽까지의 거리 D를 시간 $D/(\beta u)$ 동안 간다. 벽에서 속력 $e\beta u$로 튀어나오므로, 충돌 지점 쪽으로 $\frac{1}{2}D$를 되돌아오는 데 시간

$D/(2e\beta u)$가 더 걸린다. 두 번째 충돌이 그곳에서 일어난다면 그 시각은

$$T = \frac{D}{\beta u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{(2e+1)D}{2e\beta u}.$$

이다. 그 지점은 벽에서 $\frac{1}{2}D$ 떨어져 있으므로, 첫 번째 충돌 지점에서 $\frac{1}{2}D$만큼 **앞쪽**에 있기도 하다. A는 일정한 속도 αu로 움직이므로 $\alpha > 0$이고 $\alpha u T = \frac{1}{2}D$이어야 한다.

$$\alpha \frac{(2e+1)D}{2e\beta} = \frac{D}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(2e+1) = e\beta.$$

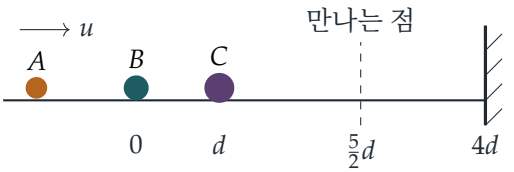
양변에 $k+1$을 곱하면 $(1-ke)(2e+1) = e(1+e)$이므로

$$ke(2e+1) = (2e+1) - e - e^2 = 1 + e - e^2 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이 값은 실제로 $\alpha > 0$을 만족한다. 이때 $ke = \frac{1+e-e^2}{2e+1}$이고, $e > 0$이면 $1 + e - e^2 < 1 + 2e$이므로 이 값은 1보다 작다.

소문항 (ii)

원점을 B의 처음 위치에 두면 C는 $x = d$에서 출발하고 벽은 $x = 4d$에 있다. 만나야 하는 지점은 벽에서 $\frac{3}{2}d$ 떨어진 $x = \frac{5}{2}d$이다.



A가 B에 부딪히는 순간을 $t = 0$으로 잡는다. 이 충돌은 (i)의 충돌과 정확히 같으므로, 충돌 후 A는 속도 αu로, B는 속도 βu로 움직인다. 여기서 α와 β는 앞에서와 같다.

? 생각해 보기 B가 C에 부딪히면 어떻게 되는가? 충돌 계산을 다시 해야 하는가?

그럴 필요 없다. C는 정지해 있고 그 질량 k^2m은 B의 질량 km의 k배이다. 따라서 이것은 질량비가 k이고 e도 같으며, 다가오는 속력만 u 대신 βu인 (i)의 충돌이다. B는 시각 $t_1 = d/(\beta u)$에 C에 부딪힌다. 충돌 후 B는 $\alpha\beta u$로, C는 $\beta^2 u$로 움직인다.

이제 다른 충돌이 먼저 일어나지 않는다고 가정하고(이는 마지막에 확인한다), 각 입자가 $x = \frac{5}{2}d$에 도달하는 시각을 구한다.

- A는 $x = 0$에서 αu로 움직이므로 $t = \dfrac{5d}{2\alpha u}$에 도달한다.
- B는 t_1에 $x = d$에 이르고, 그다음 속력 $\alpha\beta u$로 $\frac{3}{2}d$를 간다. 따라서 $t = \dfrac{d}{\beta u} + \dfrac{3d}{2\alpha\beta u}$에 도달한다.

▶ C는 벽까지 $3d$를 $\beta^2 u$로 가고, 다시 $\frac{3}{2}d$를 $e\beta^2 u$로 되돌아온다. 따라서 도달 시각은

$$t = \frac{d}{\beta u} + \frac{3d}{\beta^2 u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{d}{\beta u} + \frac{3(2e+1)d}{2e\beta^2 u}.$$

세 입자가 동시에 충돌하려면 세 시각이 모두 같아야 한다.

B와 C. 공통인 항 $d/(\beta u)$를 소거하고 $2\beta^2 u/(3d)$를 곱하면

$$\frac{1}{\alpha}\beta = \frac{2e+1}{e} \quad \Longleftrightarrow \quad e\beta = \alpha(2e+1).$$

이것은 (i)의 조건과 정확히 같으므로

$$k = \frac{1 + e - e^2}{e(2e+1)}. \tag{1}$$

(이는 우연이 아니다. 두 상황 모두에서, 한 입자는 충돌 후 다가오던 속력의 β배로 벽까지 D를 가고 $\frac{1}{2}D$를 되돌아온다. 그동안 다른 입자는 다가오던 속력의 α배로 $\frac{1}{2}D$만큼 앞으로 간다. 여기서는 $D = 3d$이고 다가오는 속력은 βu이다.)

A와 B. $\dfrac{5}{2\alpha} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{3}{2\alpha\beta}$에 $2\alpha\beta$를 곱하면 $5\beta = 2\alpha + 3$이다. 여기에 $k+1$을 곱하면

$$5(1+e) = 2(1-ke) + 3(k+1) \quad \Longrightarrow \quad 5e = k(3-2e) \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{5e}{3-2e}. \tag{2}$$

? **생각해 보기** k에 대한 식이 두 개 있다. e는 어떻게 구하는가?

(1)과 (2)를 같게 놓는다. $0 < e < 1$이므로 두 분모가 모두 양수이고, 따라서 분모를 교차하여 곱할 수 있다.

$$\begin{aligned} 5e^2(2e+1) &= (3-2e)(1+e-e^2) \\ 10e^3 + 5e^2 &= 3 + e - 5e^2 + 2e^3 \\ 0 &= 8e^3 + 10e^2 - e - 3. \end{aligned}$$

$e = \frac{1}{2}$을 넣어 보면 $1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - 3 = 0$이므로 $2e-1$이 인수이다.

$$8e^3 + 10e^2 - e - 3 = (2e-1)(4e^2 + 7e + 3) = (2e-1)(4e+3)(e+1).$$

나머지 근 $-\frac{3}{4}$와 -1은 음수이므로 $0 < e < 1$을 만족하는 근은 $e = \frac{1}{2}$뿐이고, 이것이 구하려던 결과이다. 이때 $k = \frac{5}{4}$이다.

상황이 모순 없이 성립하는지 확인하기. $e = \frac{1}{2}, k = \frac{5}{4}$이면 $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{2}{3}$이다. B가 C에 부딪히기 전에는 A(속력 $\frac{1}{6}u$)가 B(속력 $\frac{2}{3}u$)보다 느리므로 A가 B를 일찍 따라잡을 수 없다. 그 후에는 B(속력 $\frac{1}{9}u$)가 C(속력 $\frac{4}{9}u$)보다 느리므로 C가 벽에 닿기 전에 B가 C를 따라잡을 수 없다. 이제 B가 A보다 느리므로 A가 B에 가까워지고, 둘은 우리가 계산한 지점에서만 만난다. 따라서 추가 충돌은 없으며, 세 입자 모두 시각 $t = 15d/u$에 $x = \frac{5}{2}d$에 도달한다.

검산

- (i)에서 $v_1 + kv_2 = u$(운동량)이고 $v_2 - v_1 = eu$(반발)이다. $e = 1, k = 1$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 1$이다. 완전 탄성 충돌에서 질량이 같은 두 입자는 속도를 서로 맞바꾸므로, 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- (ii)에서 $u = d = 1$로 두고 위의 값을 쓰면, 세 도달 시각은 A가 $\frac{5/2}{1/6} = 15$, B가 $\frac{1}{2/3} + \frac{3/2}{1/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 15$, C가 $\frac{3}{2} + \frac{3}{4/9} + \frac{3/2}{2/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = 15$이다.
- 식 (1)에 $e = \frac{1}{2}$을 넣으면 $k = \frac{5/4}{1} = \frac{5}{4}$이고, 이는 (2)의 $\frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$와 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 만나는 지점을 충돌 지점에서 재야 하는데 벽에서 재는 것. 여기서는 둘 다 $\frac{1}{2}D$로 우연히 같지만, (ii)에서 벽에서 $\frac{3}{2}d$인 만나는 지점은 B의 출발점에서 $\frac{5}{2}d$이다.
- B–C 충돌을 처음부터 다시 계산하다가 인수를 빠뜨리는 것. 질량비가 다시 k라는 것을 알아차리면 이 계산을 하지 않아도 된다.
- C가 벽에서 $\beta^2 u$가 아니라 $e\beta^2 u$로 되돌아온다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 문제가 잘 풀리는 것은 문제가 **자기 유사**(*self-similar*)하기 때문이다. 질량을 k배, 속력을 β배로 바꾸면 한 충돌이 다음 충돌로 바뀌므로 같은 계산이 되풀이된다. 질량이 등비수열로 줄어드는 공들을 늘어놓아 에너지를 매우 효율적으로 전달하는 장치도, 운동량과 에너지를 제약 조건으로 두고 속도 공간(velocity space)에서 분석할 때 가장 깔끔해지는 유명한 "충돌하는 블록으로 π 세기" 문제도 같은 아이디어에 바탕을 두고 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 다루는 방법을 포함하여 충돌을 체계적으로 설명하는데, 이 방법을 쓰면 α와 β 같은 식이 쉽게 보인다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.