풀이

STEP III 2022, 문제 8

순수수학 • 드무아브르 정리와 무리성

> **STEP III 2022, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 5.5 절 **유리수처럼 보이지만 아닌 각**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch05/rational-angles.html

핵심 아이디어

드무아브르(De Moivre)의 정리에서 $\cos\theta$를 묶어 내면, $\sin k\theta$와 $\cos k\theta$를 $\cos^k\theta$(또는 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$)와 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$에 대한 다항식(polynomial)의 곱으로 나타낼 수 있다. $\sec^2\theta - 1$이 **짝수**이면, 이 다항식의 값은 정수이고 그 홀짝성(parity)은 첫째 항만 보고 알 수 있다. 도(degree) 단위로 잰 각이 유리수(rational)라면 어떤 $\sin k\theta$가 0이 되어야 하는데, 홀짝성 논증은 이런 일이 결코 일어날 수 없음을 보여 준다.

풀이

소문항 (i)

$\cos\theta \neq 0$이라 가정하여 $\sec\theta$가 존재하도록 한다. 드무아브르의 정리에 의해

$$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1+\mathrm{i}t)^k, \qquad t = \tan\theta.$$

이항전개(binomial expansion)하면 $(1+\mathrm{i}t)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{i}^j t^j$이다. j가 홀수인 항은 허수이고 $\mathrm{i}^{2r+1} = (-1)^r\mathrm{i}$이며, j가 짝수인 항은 실수이고 $\mathrm{i}^{2r} = (-1)^r$이다. 허수부분(imaginary

part)을 비교하면

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta\left(\binom{k}{1}t - \binom{k}{3}t^3 + \binom{k}{5}t^5 - \cdots\right)\\ &= \cos^k\theta\,\tan\theta\left(k - \binom{k}{3}t^2 + \binom{k}{5}t^4 - \cdots\right).\end{aligned}$$

$\cos^k\theta\tan\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta$이고 $t^2 = \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$이므로 이 식은

$$\sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{5}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right),$$

이 되고, 이것이 구하는 식이다. $j > k$이면 $\binom{k}{j} = 0$이므로 괄호 안의 식은 저절로 끝난다. 같은 방법으로 실수부분을 비교하면

$$\cos k\theta = \cos^k\theta\left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

소문항 (ii)

여기서 $\cos\theta = 1/a$이고 $a \geq 3$이므로 $0^\circ < \theta < 90^\circ$이다. 특히 $\sin\theta \neq 0$이고 $\cos\theta \neq 0$이다. 또한 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$인데, a가 홀수이므로 이는 **짝수**인 정수이다. $X = a^2 - 1$이라 하자.

$\sin k\theta = 0$을 만족하는 가장 작은 양의 정수를 k라 하자. 그러면 $k \neq 1$인데, 이는 $\sin\theta \neq 0$이기 때문이다. 따라서 $k > 1$이므로 소문항 (i)의 결과를 적용할 수 있다.

$$0 = \sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots\right).$$

인수 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$는 0이 아니므로 괄호 안의 식이 0이다. 첫째 항을 제외한 모든 항은 짝수인 정수 X를 적어도 하나 인수로 가지고, 이항계수(binomial coefficient)는 정수이므로

$$0 = k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots \equiv k \pmod 2.$$

따라서 k는 짝수이다. 이제

$$0 = \sin k\theta = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right).$$

그런데 $\frac{1}{2}k$는 $0 < \frac{1}{2}k < k$인 정수이므로, k의 최소성(minimality)에 의해 $\sin(\frac{1}{2}k\theta) \neq 0$이다. 그러므로 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$이고, 이것이 보이려던 것이다.

생각해 보기 θ가 유리수라는 가정은 어디에서 쓰이는가?

애초에 k가 존재하게 해 주는 것이 바로 이 가정이다. p, q가 양의 정수일 때 $\theta = p/q$라 하자(θ는 도 단위로 잰다는 것을 기억하자). 그러면 $180q\,\theta = 180p$이므로 $\sin(180q\,\theta) = 0$이다. 따라서 $\sin m\theta = 0$을 만족하는 양의 정수 m이 **존재하고**, 그러므로 그중 가장 작은 것도

존재한다. 이를 k라 하자. 이 수는 위의 가정을 만족하므로 k는 짝수이고, $n = \frac{1}{2}k$라 하면 $\cos n\theta = 0$이다.

이제 $\cos n\theta$가 0일 수 없음을 보이자. $n = 1$이면 $\cos n\theta = 1/a \neq 0$이다. $n > 1$이면 소문항 (i)의 코사인 공식에 의해

$$\cos n\theta = \frac{1}{a^n}\left(1 - \binom{n}{2}X + \binom{n}{4}X^2 - \cdots\right).$$

이번에도 첫째 항을 제외한 모든 항이 짝수이므로 괄호 안의 식은 홀수이고, 특히 0이 아니다. 따라서 $\cos n\theta \neq 0$이 되어 모순(contradiction)이다. 그러므로 θ는 무리수(irrational)이다.

소문항 (iii)

이번에는 $\cot\phi = 1/b$이므로 $\tan\phi = b$이고 $b \geq 2$이며, $0^\circ < \phi < 90^\circ$이다. 이번에도 $\sin\phi \neq 0$이고 $\cos\phi \neq 0$이며, 이 경우에는

$$\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2,$$

인데, b가 짝수이므로 이는 **짝수**인 정수이다. 따라서 $a^2 - 1$ 대신 $X = b^2$로 두면 소문항 (ii)의 논증이 그대로 성립한다. 자세히 쓰면 다음과 같다.

p, q가 양의 정수일 때 $\phi = p/q$라 하자. 그러면 $\sin(180q\,\phi) = 0$이므로 $\sin k\phi = 0$을 만족하는 가장 작은 양의 정수 k가 존재하고, $\sin\phi \neq 0$이므로 $k > 1$이다. $\sin\phi\cos^{k-1}\phi \neq 0$이므로 소문항 (i)에 의해

$$0 = k - \binom{k}{3}b^2 + \binom{k}{5}b^4 - \cdots \equiv k \pmod 2,$$

이고, 따라서 k는 짝수이다. 그러면 $0 = \sin k\phi = 2\sin(\frac{1}{2}k\phi)\cos(\frac{1}{2}k\phi)$이고, 최소성에 의해 $\sin(\frac{1}{2}k\phi) \neq 0$이므로 $n = \frac{1}{2}k$라 할 때 $\cos n\phi = 0$이다. $n = 1$이면 이는 $\cos\phi = 0$이라는 뜻인데, 이는 거짓이다. $n > 1$이면

$$\cos n\phi = \cos^n\phi\left(1 - \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{4}b^4 - \cdots\right),$$

이고, 여기서 $\cos^n\phi \neq 0$이며 괄호 안의 식은 홀수이므로 0이 아니다. 이 모순으로부터 ϕ는 무리수이다.

검산

- 소문항 (i)에 $k = 2$와 $k = 3$을 대입해 보자. 공식에서 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, $\sin 3\theta = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$를 얻는다. 두 공식은 k가 15 이하일 때 임의로 고른 각에서 직접 계산한 값과도 일치한다.

- 홀짝 조건은 꼭 필요하다. $a = 2$(짝수)이면 $\theta = 60°$이고, $b = 1$(홀수)이면 $\phi = 45°$로, 둘 다 유리수이다. 각 경우 $X = 3$ 또는 1로 홀수이므로, 논증은 정확히 깨져야 할 곳에서 깨진다.
- $a = 3$이면 $\theta \approx 70.5288°$이고, $b = 2$이면 $\phi \approx 63.4349°$이다. 컴퓨터로 확인해 보면, 30 미만의 모든 홀수 a와 짝수 b에 대해 모든 $k < 2000$에서 $\sin k\theta$와 $\sin k\phi$는 0에서 충분히 멀리 떨어져 있다.

흔한 실수

- 약분하기 전에 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta \neq 0$인 이유를 밝히지 않는 것.
- k가 어디에서 나오는지 설명하지 않는 것. 최소의 k가 존재하는 것은 오직 유리수 θ가 $\sin(180q\,\theta) = 0$을 만들기 때문이다.
- k의 최소성을 이용해 $\sin(\frac{1}{2}k\theta) = 0$인 경우를 배제하지 않고 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$이라고 결론짓는 것.

STEP 너머

여기 나온 괄호 안의 식은 앞에 곱해진 인수를 제외하면 **체비쇼프 다항식**(Chebyshev polynomials)이고, 홀짝성 기법은 정수 항등식을 소수를 법으로 하여 줄이는(reducing modulo a prime) 방법을 처음 맛보는 것이다. 이와 관련된 유명한 결과로 **니븐의 정리**(Niven's theorem)가 있다. 180°의 유리수 배인 θ 가운데 $\cos\theta$가 유리수인 것은 $\cos\theta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$인 경우뿐이다. 이 정리는 $2\cos\theta$가 대수적 정수(algebraic integer)임을 보여서 증명한다. 이와 같은 논증의 바탕이 되는 정수론(number theory)을 쌓아 가려면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*이 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.