풀이

STEP III 2022, 문제 7

순수수학 • 벡터곱 변환

> **STEP III 2022, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.5 절 3차원에서의 회전에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/rotations-3d.html

핵심 아이디어

모든 것은 벡터를 $\mathbf{n}$ 방향의 성분과 $\mathbf{n}$에 수직(perpendicular)인 성분으로 나누는 데서 출발한다. 사상(map) $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 평행한 성분은 없애고, 수직인 성분은 길이를 바꾸지 않은 채 $\mathbf{n}$을 축으로 직각만큼 돌린다. 소문항 (i)에서 이 사상을 두 번 적용하면 수직 성분에 음의 부호를 붙인 것이 된다는 것을 보이고 나면, (ii)와 (iii)의 사상이 두 성분 각각에 어떤 작용을 하는지 살펴보는 것만으로 그 정체를 바로 알 수 있다.

풀이

소문항 (i)

$\mathbf{n} = (a, b, c)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathsf{T}}$라 하면

$$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}.$$

f를 한 번 더 적용하면, $\mathbf{n} \times \mathrm{f}(\mathbf{r})$의 x성분은 $\mathrm{f}(\mathbf{r})$의 셋째 성분의 b배에서 둘째 성분의 c배를 뺀 것이다.

$$\begin{aligned} b(ay - bx) - c(cx - az) &= aby - b^2x - c^2x + acz \\ &= -x(b^2 + c^2) + aby + acz, \end{aligned}$$

따라서 요구된 식이 성립한다. $\mathbf{n}$은 단위벡터(unit vector)이므로 $b^2 + c^2 = 1 - a^2$이고, 따라서 이 식은 다음과 같이 된다.

$$-x + a^2x + aby + acz = a(ax + by + cz) - x = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\, a - x.$$

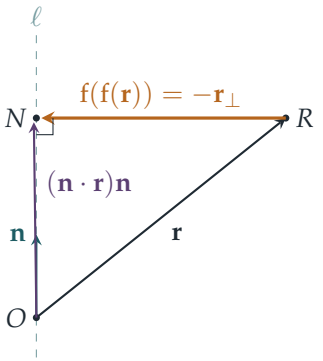
이것은 $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}$의 x성분이다. 외적(cross product)은 $a \to b \to c \to a, x \to y \to z \to x$와 같이 문자를 순환적으로 바꾸어 붙여도 변하지 않으므로, y성분과 z성분도 같은 방법으로 얻어진다. 따라서

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}.$$

기하학적 의미. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$로 쓰자. 여기서 $\mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}$ 방향의 성분이고, $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}$은 $\mathbf{n}$에 수직인 성분이다. 그러면

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}_\perp.$$

ℓ을 O를 지나고 방향이 $\mathbf{n}$인 직선이라 하고, N을 R에서 ℓ에 내린 수선의 발이라 하면 $\overrightarrow{ON} = \mathbf{r}_\parallel$이다. 그러면 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{RN}$이다. 즉 이것은 R에서 축 ℓ을 향해 그 축과 직각을 이루며 곧장 가는 벡터이다. 그 길이는 R와 ℓ 사이의 거리이다.



소문항 (ii)

축. $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$이므로 $\mathrm{f}(\mathbf{n}) = \mathbf{0}$이고, 따라서 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{n})) = \mathbf{0}$이다. 그러므로 $\mathrm{g}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$이다. 선형성(linearity)에 의해 $\mathrm{g}(\lambda\mathbf{n}) = \lambda\mathbf{n}$이므로, 직선 ℓ 위의 모든 점은 고정된다.

수직인 벡터. 이제 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$인 $\mathbf{r}$를 잡자. 소문항 (i)에 의해 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r})) = -\mathbf{r}$이므로

$$\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}) - (1 - \cos\theta)\mathbf{r} = \cos\theta\,\mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

? **생각해 보기** $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$일 때 $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 어떤 모양인가?

이 벡터는 $\mathbf{n}$과 $\mathbf{r}$ 모두에 수직이므로, O를 지나고 $\mathbf{n}$에 수직인 평면 위에 있으며 $\mathbf{r}$와 직각을 이룬다. 그 길이는 $|\mathbf{n}||\mathbf{r}| \sin 90^\circ = |\mathbf{r}|$이다. 따라서 $\mathbf{r}$와 $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$는 그 평면 위에서 서로 수직이

고 길이가 같은 두 벡터이며, $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$는 $\mathbf{r}$를 $\mathbf{n}$을 축으로 오른손 방향으로 $90°$만큼 돌린 것이다 ($\mathbf{n}$의 끝점에서 O 쪽을 내려다볼 때 시계 반대 방향). $\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j}$가 $\mathbf{i}$를 $\mathbf{j}$ 쪽으로 θ만큼 회전한 것과 꼭 마찬가지로, 벡터 $\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$는 $\mathbf{r}$를 $\mathbf{n}$을 축으로 같은 방향으로 θ만큼 회전한 것이다.

일반적인 벡터. f는 선형(linear)이므로(외적은 둘째 인자에 대해 선형이다) g도 선형이다. 일반적인 $\mathbf{r}$를 $\mathbf{r}_\parallel+\mathbf{r}_\perp$로 쓰면, g는 $\mathbf{r}_\parallel$은 그대로 두고 $\mathbf{r}_\perp$는 $\mathbf{n}$을 축으로 θ만큼 회전시킨다. 이것이 바로 ℓ을 축으로 하는 회전이 하는 일이다.

그러므로 $R\mapsto P$는 **O를 지나고 방향이 $\mathbf{n}$인 직선을 축으로 하는 각 θ만큼의 회전(rotation)**이며, 회전 방향은 $\mathbf{n}$에 대한 오른손 방향 ($\mathbf{n}$의 끝점에서 O 쪽을 바라볼 때 시계 반대 방향)이다.

소문항 (iii)

소문항 (i)을 이용하면

$$\mathrm{h}(\mathbf{r})=-\mathbf{r}-2\big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}\big)=\mathbf{r}-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}.$$

두 성분으로 나타내면 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_\parallel$이다.

- $\mathrm{h}(\mathbf{n})=\mathbf{n}-2\mathbf{n}=-\mathbf{n}$이므로, $\mathbf{n}$ 방향의 성분은 방향이 반대로 바뀐다.
- $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$이면 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$이므로, 평면 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 위의 모든 점은 고정된다.

기하학적으로, $\overrightarrow{RQ}=-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$은 평면 $\Pi:\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$에 수직이고, RQ의 중점의 위치벡터는 $\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$으로 Π 위에 있다. 따라서 Q는 R의 거울상이다. 즉 사상 $R\mapsto Q$는 **O를 지나고 $\mathbf{n}$에 수직인 평면에 대한 반사(reflection)**이다.

검산

- $\mathbf{n}=\mathbf{k}=(0,0,1)^{\mathsf{T}}$로 잡자. 그러면 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}=(-y,x,0)^{\mathsf{T}}$이고, 두 번 적용하면 $(-x,-y,0)^{\mathsf{T}}$가 되어 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}=(0,0,z)^{\mathsf{T}}-(x,y,z)^{\mathsf{T}}$와 일치한다. 또 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta,\ z)^{\mathsf{T}}$는 익숙한 z축에 대한 회전이고, $\mathrm{h}(\mathbf{r})=(x,y,-z)^{\mathsf{T}}$는 평면 $z=0$에 대한 반사이다.
- $\theta=0$이면 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$이고, h를 두 번 적용하면 항등사상이 된다. 각이 0인 회전과 반사라면 마땅히 그래야 한다.
- 무작위 단위벡터 $\mathbf{n}$, 벡터 $\mathbf{r}$, 각 θ를 2000개 골라 컴퓨터로 확인한 결과, x성분 공식, $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$에 대한 항등식, g가 $\mathbf{n}$을 축으로 하는 오른손 방향의 θ만큼의 회전과 일치한다는 것, h가 평면 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$에 대한 반사와 일치한다는 것이 모두 확인되었다.

흔한 실수

- $a^2 + b^2 + c^2 = 1$을 사용하는 것을 잊는 실수. 단위벡터가 아닌 $\mathbf{n}$에 대해서는 (i)의 항등식이 성립하지 않는다.
- (ii)에서 $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$인 경우만 확인하고, 그 결과와 $g(\mathbf{n}) = \mathbf{n}$ 및 선형성을 합치면 왜 모든 $\mathbf{r}$에 대해 결론이 나는지 설명하지 않는 실수.
- (iii)을 직선 ℓ에 대한 반사라고 부르는 실수. ℓ 위의 점들은 고정되는 것이 아니라 방향이 뒤집힌다. 고정되는 것은 $\mathbf{n}$에 수직인 평면이다.

STEP 너머

(ii)의 공식은 로드리게스(Rodrigues)의 회전 공식이고, f의 행렬은 반대칭(antisymmetric)인 "외적 행렬(cross-product matrix)" K이다. 따라서 회전은 $I + \sin\theta\, K + (1 - \cos\theta)K^2$이며, 이는 $\exp(\theta K)$이기도 하다. (iii)의 사상은 하우스홀더(Householder) 반사 $I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$로, 수치선형대수에서 두루 쓰이는 핵심 도구이다. 대학 1학년 과정에서 이들은 각각 행렬식(determinant)이 $+1$과 -1인 직교행렬(orthogonal matrix)로 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이들을 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.