풀이

STEP III 2022, 문제 6

순수수학 • 굴러가는 원과 접선

> **STEP III 2022, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

소문항 (i)은 2차 테일러 전개(Taylor expansion)이며, 진짜 요점은 마지막 줄의 경고에 있다. 1차 항이 사라지면 비는 2차 항에 의해 결정된다. 소문항 (ii)에서 구름 조건은 두 원에서 같은 길이의 호가 접점을 지나간다는 뜻이고, 이로부터 C_1이 얼마나 회전했는지 알 수 있다. (c)의 특별한 점에서는 현(chord)의 1차 항이 정확히 상쇄되므로 (i)의 2차 항이 필요하다.

풀이

소문항 (i)

α가 작을 때 $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$이고 $\sin\alpha \approx \alpha$이며, 오차는 α^3 차수이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha - \cos\theta \\ &\approx \cos\theta(1-\tfrac{1}{2}\alpha^2) - \alpha\sin\theta - \cos\theta = -\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta,\end{aligned}$$

이고, 이것이 요구된 결과이다. 같은 방법으로

$$\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta \approx \alpha\cos\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta.$$

$(*)$의 분자와 분모를 α로 나누면

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta} \approx \frac{\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha\sin\theta}{-\sin\theta - \frac{1}{2}\alpha\cos\theta} \longrightarrow -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

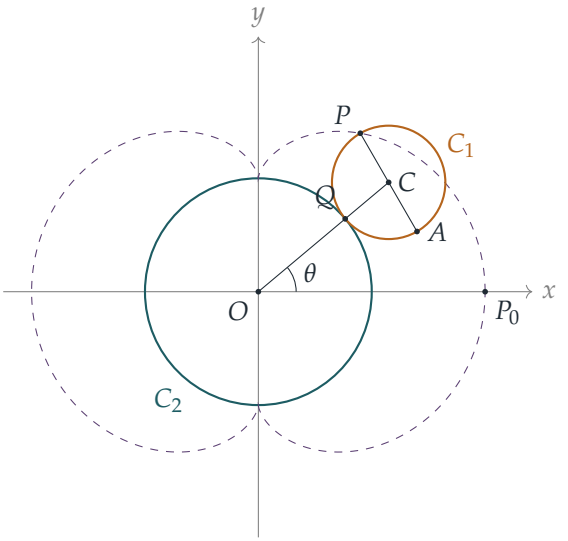
이고, 분모가 $-\sin\theta \neq 0$으로 가므로 이 극한(limit)은 문제없다.

$\sin\theta = 0$이면 $\cos\theta = \pm 1$이고, 분모의 1차 항이 사라진다.

$$(*) \approx \frac{\alpha\cos\theta}{-\frac{1}{2}\alpha^2\cos\theta} = -\frac{2}{\alpha}.$$

따라서 $(*)$는 유한한 극한을 갖지 않는다. 그 크기는 한없이 커져서 $\alpha \to 0^+$일 때 $-\infty$로, $\alpha \to 0^-$일 때 $+\infty$로 간다. (기하학적으로는 단위원에서 각 θ인 점과 각 $\theta+\alpha$인 점을 잇는 현이 수직이 되어 그 기울기(gradient)가 발산하는 것이다.)

소문항 (ii)(a)



그림은 $n=3$인 경우이며, 점선 곡선이 P의 자취이다. C를 C_1의 중심이라 하자. 두 원이 Q에서 접하므로 세 점 O, Q, C는 한 직선 위에 있고 $OC = (n-1)a + a = na$이다. 따라서

$$\overrightarrow{OC} = na(\cos\theta, \sin\theta),$$

이고, C에서 본 점 Q의 방향은 $\theta+\pi$이다.

A를 C_1 위에서 P의 지름 반대편에 있는 점이라 하자. 이 점은 처음에 $((n-1)a, 0)$에서 C_2와 접하고 있던 C_1 위의 점이다. 미끄러짐 없이 구른다(rolling without slipping)는 것은 A에서 Q까지의 C_1의 호의 길이가 접점이 이동한 C_2의 호의 길이, 즉 $(n-1)a\theta$와 같다는 뜻이다. C_1의 반지름이 a이므로 각 ACQ는 $(n-1)\theta$이다.

> **생각해 보기** C에서 볼 때 A는 Q로부터 시계 방향에 있는가, 시계 반대 방향에 있는가?

C_2의 바깥을 시계 반대 방향으로 구르면 원 C_1은 시계 반대 방향으로 회전하므로, 이미 굴러 지나간 점들은 접점에서 시계 반대 방향으로 멀어진다. 따라서 $\overrightarrow{CA}$의 방향은 $\theta + \pi + (n-1)\theta = n\theta + \pi$이고, $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CA}$의 방향은 $n\theta$이다. (검산: $\theta = 0$이면 $P = ((n+1)a, 0)$이 된다. 결국 C_1은 모두 $n\theta$만큼 회전한 것이며, 이것이 동전 하나를 다른

동전 둘레로 굴릴 때 잘 알려진 "한 바퀴 더 도는" 현상이다.) 그러므로

$$\overrightarrow{OP} = na(\cos\theta, \sin\theta) + a(\cos n\theta, \sin n\theta),$$

이므로 요구된 대로 $x(\theta) = a(n\cos\theta + \cos n\theta)$이고,

$$y(\theta) = a(n\sin\theta + \sin n\theta).$$

소문항 (ii)(b)

제곱하여 더하면

$$OP^2 = a^2(n^2 + 1 + 2n(\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta)) = a^2(n^2 + 1 + 2n\cos(n-1)\theta).$$

이것을 $(n-1)^2a^2 = (n^2 - 2n + 1)a^2$과 같다고 놓으면 $2n\cos(n-1)\theta = -2n$, 즉 $\cos(n-1)\theta = -1$이다. 따라서

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-1}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

이고, C_2를 한 바퀴 도는 동안 서로 다른 위치가 $n-1$개 나온다. 이때는 P 자신이 접점이 되는 순간이며, 곡선의 첨점(cusp)에 해당한다.

소문항 (ii)(c)

$\theta_0 = \pi/(n-1)$이면 $n\theta_0 = \theta_0 + \pi$이므로

$$\cos n\theta_0 = -\cos\theta_0, \qquad \sin n\theta_0 = -\sin\theta_0.$$

각 항에 소문항 (i)을 적용하되, $n\theta$ 항에 대해서는 작은 증분으로 $n\alpha$를 사용한다.

$$\begin{aligned}
\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{a} &\approx n(\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta_0) \\
&\quad + (n\alpha\cos n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin n\theta_0) \\
&= n\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}n\alpha^2\sin\theta_0 - n\alpha\cos\theta_0 + \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin\theta_0 \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\sin\theta_0, \\
\frac{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)}{a} &\approx n(-\alpha\sin\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta_0) \\
&\quad + (-n\alpha\sin n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\cos n\theta_0) \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\cos\theta_0,
\end{aligned}$$

이고, 각각의 오차는 α^3 차수이다. (i)의 $\sin\theta = 0$인 경우와 마찬가지로 1차 항이 정확히 상쇄되므로 2차 항이 답을 결정한다. 분자와 분모를 $\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2$으로 나누면

$$\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)} = \frac{\sin\theta_0 + O(\alpha)}{\cos\theta_0 + O(\alpha)} \longrightarrow \tan\theta_0,$$

이다. 단, $\cos\theta_0 \neq 0$이어야 하며, 이는 $n \geq 4$일 때 성립한다. $n = 3$이면 $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$이고, 같은 계산으로 역수의 비가 $\cot\theta_0 = 0$으로 감을 알 수 있으므로 현은 수직이 된다.

이 극한은 현의 기울기의 극한이므로 θ_0에서의 접선(tangent)의 기울기이다. 한편

$$x(\theta_0) = a(n\cos\theta_0 - \cos\theta_0) = (n-1)a\cos\theta_0, \qquad y(\theta_0) = (n-1)a\sin\theta_0,$$

이므로 OP는 x축과 각 θ_0를 이루고 기울기가 $\tan\theta_0$이다($n = 3$일 때는 수직이다). 접선과 OP의 방향이 같으므로 $(x(\theta_0), y(\theta_0))$에서의 접선은 OP와 평행하다. 사실 접선은 P를 지나므로 직선 OP 위에 놓인다.

검산

- $\theta = 0, \alpha = 0.001$일 때 비 $(*)$는 -1999.9998이며, $-2/\alpha = -2000$과 비교된다.
- $n = 5, \theta_0 = \frac{1}{4}\pi, \alpha = 10^{-4}$일 때 현의 기울기는 1.0004로, $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$에 가깝다.
- θ_0에서 $OP = (n-1)a$이므로 (c)의 점은 (b)에서 구한 $k = 0$인 첨점이다. 그래서 그 점에서의 접선이 반지름 방향이다.

흔한 실수

- C_1의 회전각을 (굴러간 호에 해당하는) $(n-1)\theta$로 잡고, C가 O 둘레를 돌면서 생기는 추가 θ를 빠뜨리는 것.
- (c)에서 1차 근사만 사용하는 것: 그러면 $0/0$이 나와 아무것도 알 수 없다.
- $n = 3$이면 $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$가 되어 $\tan\theta_0$가 정의되지 않는다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이 곡선은 첨점이 $n-1$개인 에피사이클로이드(epicycloid)이다. 각 첨점에서 속도 $(x'(\theta), y'(\theta))$가 영이므로 일반적인 공식 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'/x'$을 쓸 수 없다. 소문항 (c)는 2차까지 전개하여 이 문제를 처리하는데, 이는 사실상 로피탈의 정리(l'Hôpital's rule)를 변형한 것이다. 매개변수로 나타낸 곡선에서 속도가 영인 점을 특이점(singular point)이라 하며, 곡선의 미분기하학(differential geometry)을 처음 배우는 과정에서 다룬다. 소문항 (i)의 바탕이 되는 극한과 테일러 근사에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.