풀이

STEP III 2022, 문제 5

순수수학 • 대칭성을 이용한 정적분

> **STEP III 2022, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

대칭 구간 $[-a, a]$에서는 치환(substitution) $x \mapsto -x$를 이용해 적분을 $[0, a]$ 위로 접어 넣을 수 있고, 이때 x에서의 값과 $-x$에서의 값이 짝을 이룬다. $1/(1+\text{무언가})$ 꼴의 피적분함수(integrand)에 대해서는 짝 $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q}$가 정확히 $pq = 1$일 때에만 1로 깔끔하게 줄어들며, $\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$이 그 전형적인 예이다. 이 문제의 핵심은 이러한 짝짓기를 알아차리고, 나아가 그것이 답이 a가 되는 **유일한** 방법이 되는 때가 언제인지를 아는 데 있다.

풀이

소문항 (i)

$I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$라 하자. $x = -u$로 치환하면($\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$이고, 적분 구간의 위끝과 아래끝이 다시 뒤바뀐다),

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^{u}}{\mathrm{e}^{u}+1}\,\mathrm{d}u,$$

이다. 여기서 마지막 등호는 분자와 분모에 e^{u}를 곱하여 얻는다. 이것을 원래 꼴의 I와 더하면

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a,$$

이므로, 모든 $a \geq 0$에 대하여 $I = a$이다. 이로써 요구된 결과가 증명된다.

소문항 (ii)

설명. $a \geq 0$에 대하여 $G(a) = \displaystyle\int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$로 정의하자. g가 연속(continuous)이므로, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해 G는 미분가

능(differentiable)하고 $G'(a) = g(a)$이다($a = 0$에서는 한쪽 도함수(one-sided derivative)). 그런데 G는 $[0,\infty)$에서 항등적으로 0이므로, 그곳에서 도함수도 0이다. 따라서 모든 $a \geq 0$에 대하여 $g(a) = 0$이다. (연속성이 중요하다. 연속성이 없으면 g는 어떤 적분값에도 영향을 주지 않으면서 고립된 점들에서 0이 아닌 값을 가질 수 있다.)

적분 접기. 0에서 구간을 나누고 왼쪽 절반에 $x = -u$를 대입하면

$$\int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} = \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{f}(-u)}.$$

이다. $a = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x$로 쓰면

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} - a = \int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{여기서} \quad g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)} - 1.$$

을 얻는다. $\mathrm{f} \geq 0$이므로 두 분모는 모두 1 이상이고, 따라서 g는 연속이다.

> **생각해 보기** 방금 설명한 결과는 한 방향의 명제이다. 이것은 "필요충분(if and only if)" 조건의 어느 방향을 주며, 다른 방향은 어디에서 오는가?

- 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(x) = 0$이면 $\int_0^a g = 0$이고, 따라서 모든 $a \geq 0$에 대하여 적분값은 a이다. 이 방향은 바로 나온다.
- 역으로, 모든 $a \geq 0$에 대하여 적분값이 a이면 모든 $a \geq 0$에 대하여 $\int_0^a g = 0$이고, 첫 번째 문단의 결과를(이 연속함수 g에 적용하면) 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(x) = 0$을 얻는다.

따라서 적분 조건은 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(x) = 0$일 때, 그리고 그때에만 성립한다.

곱 조건. $p = \mathrm{f}(x)$, $q = \mathrm{f}(-x)$라 하자. 양변에 $(1+p)(1+q) > 0$을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} = 1 &\iff (1+q) + (1+p) = (1+p)(1+q) \\ &\iff 2 + p + q = 1 + p + q + pq \\ &\iff pq = 1. \end{aligned}$$

이다. 그러므로 모든 $x \geq 0$에 대하여 $g(x) = 0$인 것은 모든 $x \geq 0$에 대하여 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$인 것과 동치이다. 마지막으로, 식 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)$는 x를 $-x$로 바꾸어도 변하지 않으므로, 이 식이 모든 $x \geq 0$에 대하여 1인 것은 모든 실수 x에 대하여 1인 것과 정확히 같다. 이로써 동치 관계의 사슬이 완성된다.

소문항 (iii)

앞에서와 똑같이 적분을 접되, 이번에는 왼쪽 절반에서 $\mathrm{h}(-u) = \mathrm{h}(u)$를 이용한다.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{h}(-u)}{1+\mathrm{f}(-u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{a} \mathrm{h}(x)\left(\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

소문항 (ii)에서 보인 동치 관계에 의해 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$이면 괄호 안의 값이 1이기 때문이다. ($\mathrm{f} \geq 0$이라는 조건과 연속성 조건은 단지 모든 피적분함수가 연속이 되도록 해 줄 뿐이다.)

소문항 (iv)

? **생각해 보기** $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cosh x}$를 어떻게 $\dfrac{\text{상수}}{1+\mathrm{f}(x)}$ 꼴로 쓸 수 있을까?

$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$이므로, 분자와 분모에 e^{x}를 곱하면

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x} = \frac{2\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{2\cos x}{1+\mathrm{e}^{2x}},$$

이다. $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{2x}$로 두면, 이 함수는 연속이고 양수이며 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x} = 1$을 만족한다. 또 $\mathrm{h}(x) = 2\cos x$로 두면, 이 함수는 연속인 우함수(even function)이다. $a = \frac{1}{2}\pi$로 두고 소문항 (iii)을 적용하면

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} 2\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[2\sin x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = 2.$$

을 얻는다.

검산

- 소문항 (i)은 소문항 (iii)에서 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x}$, $\mathrm{h} \equiv 1$인 특수한 경우이며, 예상대로 $\int_{0}^{a} 1\,\mathrm{d}x = a$를 준다.
- 반례: $\mathrm{f}(x) = x^{2}$은 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = x^{4} \neq 1$이고, 실제로 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}} = \frac{\pi}{2} \neq 1$이다.
- 소문항 (iv)의 적분을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 수치 계산하면 2.0000000이 나온다. 또한 소문항 (iii)의 항등식은 $\mathrm{f} = \mathrm{e}^{(\text{기함수})}$와 우함수 h를 무작위로 여러 번 골라 컴퓨터로도 확인하였다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 "필요충분" 조건의 한 방향만 증명하는 것: 적분 조건에서 거꾸로 $g = 0$을 이끌어 내는 단계가 바로 첫 번째 결과(그리고 g의 연속성)가 필요한 곳이다.
- $x \geq 0$에서 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$이면 왜 모든 x에서 성립하는지 설명하지 않는 것: 이 식은 $x \mapsto -x$에 대하여 대칭이다.
- 소문항 (iv)에서 $\mathrm{e}^{-x}\cos x / \cosh x$를 $2\cos x/(1+\mathrm{e}^{2x})$로 고쳐 쓰지 않고 직접 적분하려 하는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)의 논증은 미적분학의 기본정리를 "거꾸로" 사용한 것이며, 해석학(analysis)에서 연속성 가정이 그토록 자주 등장하는 이유이기도 하다. 적분은 개별 점에서 일어나는 일을 볼 수 없으므로, 오직 연속성이 있어야만 적분으로부터 함수의 값을 되찾을 수 있다. 적분을 접는 기법은 함수를 우함수 부분과 기함수(odd function) 부분으로 나누는 것과 가까운 사촌이다. 여기서 $\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} - \frac{1}{2}$는 정확히 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$일 때 기함수가 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 기본정리와 연속성이 필요한 이유를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.