풀이

STEP III 2022, 문제 4

순수수학 • 무한곱

> **STEP III 2022, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 2.5 절 **비에트의 곱**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch02/viete.html

핵심 아이디어

모든 것은 배각 공식(double-angle formula) $\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta$를 거듭 적용하는 데서 출발한다. 공식을 한 번 쓸 때마다 sinh의 인수가 절반이 되고 cosh 인수가 하나 남는다. n번 반으로 나누고 나면 남은 $\sinh(x/2^n)$은 아주 작아서 $x/2^n$과 거의 같게 행동하므로, $n \to \infty$로 보내면 유한한 항등식이 무한곱(infinite product)으로 바뀐다. 마지막 두 소문항은 이 곱에 잘 고른 x 값을 대입한 것과, 그 삼각함수판 쌍둥이를 다룬다.

풀이

소문항 (i)

$P_n(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)$라 하자. 모든 양의 정수 n에 대하여 $\sinh x = 2^n P_n(x)\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)$임을 증명한다.

$n = 1$인 경우. $\theta = x/2$로 두고 배각 공식을 쓰면 $\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$이고, 이것이 $n = 1$일 때의 명제이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n = k$에 대하여 결과가 성립한다고 가정하자. $\theta = x/2^{k+1}$로 두고 배각 공식을 쓰면

$$\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),$$

이므로

$$\begin{aligned}\sinh x &= 2^k P_k(x)\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2^k P_k(x)\cdot 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\ &= 2^{k+1}P_{k+1}(x)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),\end{aligned}$$

이고, 이것은 $n = k+1$일 때의 결과이다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 양의 정수 n에 대하여 성립한다.

따름 결과. $x \neq 0$이면 $x/2^n \neq 0$이므로 $\sinh(x/2^n) \neq 0$이다(sinh의 영점은 0뿐이다). 따라서 항등식을 $x\sinh(x/2^n)/2^n$으로 나눌 수 있고, 그러면

$$\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)} = P_n(x),$$

를 얻는다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

$y \neq 0$일 때 매클로린 급수(Maclaurin series)를 y로 나누면

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots = 1 + y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^{2r-2}}{(2r+1)!}.$$

? 생각해 보기 "첫째 항 이후의 모든 항이 0으로 간다"고 말하는 것으로 충분할까?

충분하지 않다. 항이 무한히 많으므로 그 합을 위에서 눌러 주어야 한다. $0 < |y| \leq 1$이면 $y^{2r-2} \leq 1$이므로

$$0 \leq \frac{\sinh y}{y} - 1 \leq y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1),$$

이고, 우변은 $y \to 0$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 $\dfrac{\sinh y}{y} \to 1$이고, 역수를 취하면 $\dfrac{y}{\sinh y} \to 1$이다.

이제 $x \neq 0$을 고정하고 (i)의 항등식에서 $n \to \infty$로 보내자. $y = x/2^n$으로 두면 $y \to 0$이므로 인수 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$은 1로 수렴한다. 따라서 좌변은 $\dfrac{\sinh x}{x}$로 수렴하고, 우변은 부분곱(partial product) $P_n(x)$이다. 그러므로 부분곱은 $\dfrac{\sinh x}{x}$로 수렴하며, 이것이 바로 다음 명제이다.

$$\frac{\sinh x}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots.$$

소문항 (iii)

$x = \ln 2$이면 $e^{x/2^n} = 2^{1/2^n}$이므로, 분모와 분자에 $2^{1/2^n}$을 곱하면

$$\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{2^{1/2^n} + 2^{-1/2^n}}{2} = \frac{2^{2/2^n} + 1}{2 \times 2^{1/2^n}} = \frac{1 + 2^{1/2^{n-1}}}{2 \times 2^{1/2^n}},$$

이다. $n = 1$이면 $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$이고, $n = 2$이면

$$\cosh\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1 + 2^{1/2}}{2 \times 2^{1/4}},$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

(ii)의 좌변에서 $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$이므로 $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{3}{4 \ln 2}$이다.

우변에서 처음 N개 인수의 부분곱은

$$P_N(\ln 2) = \frac{\prod_{n=1}^{N}\left(1 + 2^{1/2^{n-1}}\right)}{2^N \cdot 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}}} = \frac{3}{2} \cdot \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1 + 2^{1/2^k}}{2} \cdot \frac{1}{2^{1-1/2^N}},$$

이다. 여기서 $n = 1$인 인수 $(1+2)/2$를 따로 떼어 내고, $k = n - 1$로 첨자를 다시 매기고, 지수에 있는 등비급수(geometric series)를 합했다. $N \to \infty$일 때 $2^{1-1/2^N} \to 2$이고, (ii)에 의하여 $P_N(\ln 2) \to \dfrac{3}{4 \ln 2}$이다. 따라서 부분곱 $\prod_{k=1}^{N-1} \frac{1+2^{1/2^k}}{2}$는 수렴하고

$$\frac{3}{4 \ln 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{1/2^k}}{2},$$

이며, $\frac{3}{4}$를 약분하면

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1 + 2^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{1 + 2^{\frac{1}{4}}}{2} \times \frac{1 + 2^{\frac{1}{8}}}{2} \times \cdots.$$

소문항 (iv)

$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$가 같은 꼴이므로, sin과 cos에 대해서도 똑같은 논증이 한 글자도 바꾸지 않고 통한다. 귀납법으로

$$\sin x = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

을 얻는다. $0 < x < \pi$이면 $0 < x/2^n < \pi$이므로 $\sin(x/2^n) \neq 0$이고, 앞에서처럼 나눌 수 있다. 매클로린 급수 $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \cdots$에서 $0 < |y| \leq 1$일 때

$$\left|\frac{\sin y}{y} - 1\right| \leq y^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1) \to 0,$$

이므로 $\sin y / y \to 1$이고, $n \to \infty$로 보내면

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \cdots.$$

(다른 방법으로, $\cosh(it) = \cos t$와 $\sinh(it) = i\sin t$를 이용하여 (ii)에 $x = it$를 대입할 수도 있다. 하지만 (ii)의 급수 논증은 실수 y에 대한 것이었으므로, 직접 다시 하는 편이 더 깔끔하다.)

$x = \frac{\pi}{2}$로 두자. 좌변은 $\dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$이고, 인수들은 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ 등이다.

생각해 보기 $\cos(\pi/8)$, $\cos(\pi/16)$, ...를 어떻게 중첩 제곱근(nested square root)으로 바꿀 수 있을까?

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$을 $2\cos\theta = \sqrt{2+2\cos 2\theta}$의 꼴로 쓴다. 여기서 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이면 $\cos\theta > 0$이므로 양의 제곱근을 택한다. $c_n = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$이라 하자. 그러면 $c_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$이고, $\theta = \pi/2^{n+2}$로 두면

$$c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n}.$$

이다. 따라서 $c_1 = \sqrt{2}$, $c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $c_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ 등이고, 곱의 n번째 인수는 $c_n/2$이다. 그러므로

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots,$$

이고, 이것이 1593년의 비에트(Viète) 공식이다.

검산

- (i)에서 $n = 1$, $x = 2\theta$로 두면 배각 공식이 그대로 나온다. 당연히 그래야 한다.
- (iii)에서 $\cosh(\frac{1}{2}\ln 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.0607$이고, 일반적인 n에 대한 공식은 $n = 1$일 때 이 값과 일치한다.
- 수치적으로 (iii)의 곱은 빠르게 안정된다. 처음 60개 인수를 곱하면 $1.442695\ldots$가 되어 $1/\ln 2 = 1.4426950\ldots$와 일치하고, (iv)의 곱은 $0.6366197\ldots$가 되어 $2/\pi$와 일치한다. 두 값 모두 컴퓨터로 유효숫자 약 15자리까지 확인했다.

흔한 실수

- $x \neq 0$이므로 $\sinh(x/2^n)$이 0이 아니라는 점을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것.
- (iii)에서 첨자를 하나씩 밀려 세는 실수. $n = 1$인 인수는 $3/(2\sqrt{2})$로, $(1 + 2^{1/2^k})/2$ 꼴이 아니다. 또 남는 거듭제곱 $2^{1/2} \cdot 2^{1/4} \cdots$를 모으면 1이 아니라 2라는 인수가 된다.
- 문제가 요구하는 급수를 이용한 논증 없이 "$y/\sinh y \to 1$"을 그냥 가정하는 것.

STEP 너머

무한급수가 부분합의 극한으로 정의되듯이, 무한곱 $\prod a_n$은 부분곱의 극한으로 정의된다. 로그를 취하면 하나가 다른 하나로 바뀌므로, $\prod(1+u_n)$의 수렴은 $\sum u_n$의 수렴과 밀접하게 연결되어 있다. 여기서 얻은 $\sin x/x$의 곱 공식은 오일러(Euler)의 더 유명한 곱 공식 $\sin x = x\prod_{k\geq 1}\left(1-x^2/(k^2\pi^2)\right)$과 나란히 놓이며, 이 공식에서 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$이 나온다. (ii)와 같은 논증을 엄밀하게 만드는 극한의 세심한 다루기에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.