풀이

STEP III 2022, 문제 3

순수수학 • 음함수 미분법

> **STEP III 2022, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

음함수 미분(implicit differentiation)을 한다. 정류점(stationary point)에서는 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 분자(numerator)가 0이 되어야 하며, 이로부터 y를 x로 나타낼 수 있다(또는 둘 사이의 일차관계식을 얻는다). 이것을 곡선의 방정식에 다시 대입하면 x에 관한 방정식 하나만 남고, 문제는 결국 이 방정식이 언제 서로 다른 두 실근(real root)을 갖는가로 바뀐다. (i)에서는 이 방정식이 모습을 바꾼 이차방정식(quadratic)이고, (ii)에서는 사차방정식(quartic)이며, 그 근의 개수를 세는 방법은 극점(turning point)을 찾는 것이다.

풀이

소문항 (i)

$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$을 x에 대하여 음함수 미분하면

$$2ax + by + (bx + 2cy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

정류점에서는 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이므로 $2ax + by = 0$, 즉 $y = -\frac{2a}{b}x$이다($abc \neq 0$이므로 b로 나눌 수 있다). 이를 곡선의 방정식에 대입하면

$$ax^2 - 2ax^2 + \frac{4a^2c}{b^2}x^2 = 1$$
$$\frac{a(4ac - b^2)}{b^2}x^2 = 1.$$

$4ac - b^2 \leq 0$이면 모든 x에 대하여 좌변이 ≤ 0이므로($a > 0$임을 떠올리자) 정류점은 하나도 없다. 따라서 곡선이 두 정류점을 가지면 $4ac - b^2 > 0$, 즉 $b^2 < 4ac$이어야 하며, 이것이

보이려던 것이다. (역으로 $b^2 < 4ac$이면 $x = \pm|b|/\sqrt{a(4ac - b^2)}$를 얻으므로 정확히 두 점이 생긴다.)

> **생각해 보기** 이 점들에서 $bx + 2cy$도 0이 되어, 도함수가 실제로는 정의되지 않을 수도 있지 않을까?

$2ax + by = 0$과 $bx + 2cy = 0$이 동시에 성립한다면, 행렬식(determinant) $4ac - b^2$이 0이 아니므로 해는 $x = y = 0$뿐이고, 이 점은 곡선 위에 있지 않다. 따라서 두 점에서는 실제로 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$이다.

소문항 (ii)

$ay^3 + bx^2y + cx = 1$을 음함수 미분하면

$$(3ay^2 + bx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2bxy + c = 0.$$

따라서 정류점에서는 $2bxy + c = 0$이다. $c \neq 0$이므로 $x \neq 0$이고, 따라서 $y = -\dfrac{c}{2bx}$이다. 이를 곡선의 방정식에 대입하면

$$-\frac{ac^3}{8b^3x^3} - \frac{cx}{2} + cx = 1, \qquad \text{즉} \qquad -\frac{ac^3}{8b^3x^3} + \frac{cx}{2} = 1.$$

양변에 $8b^3x^3$을 곱하고 정리하면

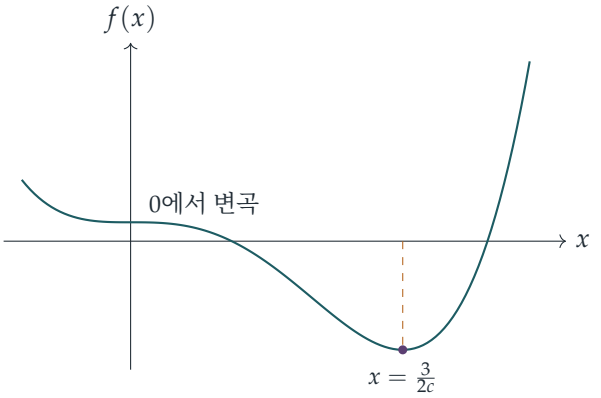
$$4cb^3x^4 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0,$$

이고, 이것이 구하려던 방정식이다.

좌변을 $f(x)$라 하자. $y = -c/(2bx)$는 x에 의해 정해지므로, 각 정류점의 x좌표는 서로 다르다. 따라서 정류점이 두 개라는 것은 f가 서로 다른 실근을 적어도 두 개 갖는다는 뜻이다. f의 근의 개수를 세기 위해 도함수를 살펴보자.

$$f'(x) = 16cb^3x^3 - 24b^3x^2 = 8b^3x^2(2cx - 3).$$

인수 x^2은 부호가 바뀌지 않으므로 f'은 $x = \frac{3}{2c}$에서만 부호가 바뀐다. $c > 0$이라 하자. 그러면 최고차항 계수(leading coefficient) $4cb^3$은 양수이고($b > 0$이므로), f는 $x < \frac{3}{2c}$에서 순감소(strictly decreasing)하고 $x > \frac{3}{2c}$에서 순증가한다. 점 $x = 0$은 정류 변곡점(stationary point of inflection)일 뿐이다. 따라서 f는 $\frac{3}{2c}$의 양쪽에 각각 많아야 하나의 근을 가지며, 서로 다른 두 근을 가질 필요충분조건은 최솟값이 음수인 것이다. $c < 0$이면 모든 것이 반대가 된다. f는 증가하다가 감소하며, 서로 다른 두 근을 가질 필요충분조건은 최댓값이 양수인 것이다. 두 경우 모두 조건은 $c\,f\left(\frac{3}{2c}\right) < 0$이다.



$a = -1, b = c = 1$인 경우: $f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 1$은 극점을 하나만 가지며, 그것은 $x = \frac{3}{2}$에서의 극소이고, 실근은 두 개이다.

이제 극점에서의 값을 계산하자.

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2c}\right) &= 4cb^3 \cdot \frac{81}{16c^4} - 8b^3 \cdot \frac{27}{8c^3} - ac^3 \\ &= \frac{81b^3}{4c^3} - \frac{108b^3}{4c^3} - ac^3 = -\frac{27b^3 + 4ac^6}{4c^3}. \end{aligned}$$

따라서

$$c\, f\left(\tfrac{3}{2c}\right) = -\frac{4ac^6 + 27b^3}{4c^2},$$

이고, 이 값은 정확히 $4ac^6 + 27b^3 > 0$일 때 음수이다. 그러므로 곡선이 두 정류점을 가지면 $4ac^6 + 27b^3 > 0$이다.

소문항 (iii)

둘째와 셋째 방정식은 $2bxy + c$와 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$의 계수 $3ay^2 + bx^2$이 모두 0이라는 뜻이므로, 이 점은 (ii)의 방법이 통하지 않는 곡선 위의 점이다. $c \neq 0$이므로 둘째 방정식에서 $x \neq 0$이고 $y = -\frac{c}{2bx}$이다. 처음 두 방정식은 (ii)에서 사용한 것과 똑같으므로 x는 다음을 만족한다.

$$4cb^3x^4 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0. \qquad (*)$$

$y = -c/(2bx)$를 셋째 방정식에 대입하면

$$\frac{3ac^2}{4b^2x^2} + bx^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4b^3x^4 = -3ac^2.$$

여기에 c를 곱하면 $(*)$의 첫째 항은 $-3ac^3$이 되므로, $(*)$는 다음과 같이 된다.

$$-3ac^3 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = -\frac{ac^3}{2b^3}.$$

$x^4 = -\dfrac{3ac^2}{4b^3}$을 이것으로 나누면($x \neq 0$이므로 가능하다)

$$x = \frac{-3ac^2/(4b^3)}{-ac^3/(2b^3)} = \frac{3}{2c}.$$

즉 해는 정확히 (ii)에서 본 f의 극점에 놓인다. $x = \frac{3}{2c}$를 $x^3 = -\frac{ac^3}{2b^3}$에 다시 대입하면

$$\frac{27}{8c^3} = -\frac{ac^3}{2b^3} \quad \Longrightarrow \quad 54b^3 = -8ac^6 \quad \Longrightarrow \quad 4ac^6 + 27b^3 = 0,$$

이 되어 증명이 끝난다. (같은 말이지만, (ii)의 공식에 의해 $f\left(\frac{3}{2c}\right) = 0$이다.) 이것은 (ii)의 경계인 경우이다. 사차방정식의 두 근이 극점에서 하나로 합쳐져 중근(repeated root)이 되고, 곡선은 그곳에서 두 정류점 대신 특이점(singular point)을 갖는다.

검산

- (i)에서 $a = c = 1$, $b = 1$로 놓으면 곡선 $x^2 + xy + y^2 = 1$은 타원(ellipse)이고 $b^2 = 1 < 4$이다. 정류점은 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$이며, 실제로 곡선 위에 있다.
- (ii)에서 $a = -1$, $b = c = 1$이면 $4ac^6 + 27b^3 = 23 > 0$이고, f의 최솟값은 $f(\frac{3}{2}) = -5.75 = -\frac{23}{4}$로 $-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}$과 일치한다.
- (iii)에서 $a = -2$, $c = 1.3$으로 정하고 b를 $27b^3 = -4ac^6$이 되도록 잡으면, $x = \frac{3}{2c}$, $y = -\frac{c}{2bx}$는 반올림 오차 범위 안에서 세 방정식을 모두 만족한다. 무작위로 뽑은 수천 개의 (a, b, c)에 대한 컴퓨터 검사에서도 정류점의 개수가 (i)과 (ii)의 조건과 일치함을 확인했다.

흔한 실수

- $x = 0$이 사차식의 임계점(critical point)이라는 사실을 잊는 것. 이 점은 극점이 아니라 변곡점이며, 이 점을 밝혀야 근이 많아야 두 개라는 결론을 내릴 수 있다.
- c의 부호를 빠뜨리는 것. 극점이 극소가 되는 것은 $c > 0$일 때뿐이다. 조건을 $c\,f(\frac{3}{2c}) < 0$으로 쓰면 두 경우를 한꺼번에 다룰 수 있다.
- (i)에서 $b^2 = 4ac$인 경우 $0 = 1$이 되므로 이때도 정류점이 없다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

양 $4ac^6 + 27b^3$은 상수배를 제외하면 이 사차식의 **판별식**(*discriminant*)이다. 이차식에서 $b^2 - 4ac$가 그렇듯이(그리고 삼차식 $t^3 + pt + q$에서 $4p^3 + 27q^2$가 그렇듯이), 이 값은 사

차식이 중근을 가질 때 정확히 0이 된다. 소문항 (iii)은 그 기하학적 의미를 보여 준다. 중근은 곡선의 **특이점**에 대응하며, 특이점에서는 $ay^3 + bx^2y + cx$의 두 편도함수(partial derivative)가 동시에 0이 된다. 특이점과 판별식은 대수기하학(algebraic geometry)의 출발점이다. 다항식과 곡선에 관련된 아이디어를 부드럽고 시각적으로 소개하는 책으로는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를, 이런 유형의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 권한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.