풀이

STEP III 2022, 문제 2

순수수학 • 무한 강하법

> **STEP III 2022, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 1.5 절 **무한 강하법**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch01/infinite-descent.html

핵심 아이디어

이것은 페르마(Fermat)의 **무한 강하법**(*method of infinite descent*)이다. 0이 아닌 정수해가 존재한다고 가정하자. 나누어떨어짐(divisibility)에 관한 논증으로 모든 변수가 공약수를 가진다는 것을 보인다. 이 공약수로 나누면, 절댓값이 엄밀하게 더 작은 0이 아닌 정수로 이루어진 같은 꼴(또는 아주 가까운 꼴)의 새로운 해를 얻는다. 양의 정수는 한없이 작아질 수 없으므로 이런 과정이 끝없이 계속될 수는 없다. 각 소문항에서 할 일은 살펴볼 알맞은 소수(prime)(2 또는 3)를 찾고, 새로운 해가 정말로 원래 해와 같은 꼴인지 확인하는 것이다.

풀이

풀이 전체에서 다음 두 가지 사실을 사용한다. 소수 m이 x^k를 나누면 m은 x를 나눈다. 또 x가 $m \geq 2$의 0이 아닌 배수이면, x/m은 $|x/m| < |x|$인 0이 아닌 정수이다.

소문항 (i)

a, b, c가 0이 아닌 정수이고 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$이라고 가정하자. 그러면

$$a^3 = -2\left(b^3 + 2c^3\right)$$

은 짝수이다. 홀수의 세제곱은 홀수이므로 a는 짝수이다. $a = 2p$라 하자. 그러면 p는 $|p| = \frac{1}{2}|a| < |a|$인 0이 아닌 정수이다. 대입하면

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

이것이 첫 번째 주장이다.

이제 새로운 방정식에 같은 논증을 반복한다. 그러면 $b^3 = -2\left(2p^3 + c^3\right)$이므로 b는 짝수이고, $b = 2q$라 하면

$$4p^3 + 8q^3 + 2c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0.$$

한 번 더 하면 $c^3 = -2\left(p^3 + 2q^3\right)$이므로 $c = 2r$이고,

$$2p^3 + 4q^3 + 8r^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

여기서 $p = a/2$, $q = b/2$, $r = c/2$는 $|p| < |a|$, $|q| < |b|$, $|r| < |c|$인 0이 아닌 정수이므로, 요구한 대로이다.

> **생각해 보기** 이것이 왜 단지 "또 다른 해"가 있다는 뜻이 아니라 해가 전혀 없다는 뜻이 되는가?

0이 아닌 정수해가 존재한다고 가정하자. 그 모든 해 가운데 $|a|$가 가장 작은 것을 하나 고른다. 공집합이 아닌 양의 정수의 집합은 언제나 최소 원소를 가지므로 이렇게 고를 수 있다. 그러면 위의 논증으로 $|p| < |a|$인 0이 아닌 정수해 (p, q, r)를 또 얻게 되는데, 이는 $|a|$의 최소성에 모순이다. 따라서 그러한 정수 a, b, c는 존재하지 않는다. (같은 말이지만, 이 과정을 계속하면 양의 정수로 이루어진 엄밀하게 감소하는 무한 수열 $|a| > |a/2| > |a/4| > \cdots$를 얻게 되는데, 이는 불가능하다.)

소문항 (ii)

이번에 사용할 소수는 3이다. a, b, c가 0이 아닌 정수이고 $9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$이라고 가정하자.

- $10b^3 = -3\left(3a^3 + 2c^3\right)$이므로 3은 $10b^3$을 나눈다. 3은 10을 나누지 않으므로 b^3을 나누고, 따라서 b를 나눈다. $b = 3q$라 하자. 그러면 $9a^3 + 270q^3 + 6c^3 = 0$, 즉

$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$

- 이제 $2c^3 = -3\left(a^3 + 30q^3\right)$이므로 $3 \mid c$이다. $c = 3r$이라 하면 $3a^3 + 90q^3 + 54r^3 = 0$, 즉

$$a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0.$$

▶ 마지막으로 $a^3 = -3\left(10q^3 + 6r^3\right)$이므로 $3 \mid a$이다. $a = 3p$라 하면 $27p^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$, 즉

$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

따라서 $(p, q, r) = (a/3, b/3, c/3)$는 같은 방정식의 0이 아닌 정수해이고 $|p| < |a|$이다. 소문항 (i)에서처럼 $|a|$가 최소인 해를 고르면 모순이 생기므로, 0이 아닌 정수해는 없다.

소문항 (iii)

3의 배수가 아닌 정수는 어떤 정수 n에 대하여 $3n \pm 1$ 꼴로 쓸 수 있다. 그러면

$$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3\left(3n^2 \pm 2n\right) + 1,$$

이므로 이 값은 3의 배수보다 1 크다. 반면 3의 배수의 제곱은 3의 배수(사실은 9의 배수)이다.

따라서 모든 제곱수는 3으로 나눈 나머지가 0 또는 1이고, 나머지가 0인 것은 원래 수가 3의 배수일 때뿐이다. $x^2 + y^2$의 나머지로 가능한 것은

$$0 + 0 = 0, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 1 + 1 = 2.$$

이다. 따라서 $x^2 + y^2$이 3의 배수가 되는 것은 두 나머지가 모두 0일 때, 즉 x와 y가 모두 3의 배수일 때뿐이다.

이제 a, b, c가 0이 아닌 정수이고 $a^2 + b^2 = 3c^2$이라고 가정하자. 우변은 3의 배수이므로, 방금 증명한 결과에 의해 $a = 3p$, $b = 3q$이다. 그러면

$$9p^2 + 9q^2 = 3c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 3\left(p^2 + q^2\right).$$

따라서 c^2은 3의 배수이다. 첫 번째 결과에 의해 c도 3의 배수여야 한다. 그렇지 않다면 c^2은 3의 배수보다 1 클 것이기 때문이다. $c = 3r$이라 하면

$$9r^2 = 3\left(p^2 + q^2\right) \quad \Longrightarrow \quad p^2 + q^2 = 3r^2.$$

이것은 같은 방정식의 0이 아닌 정수해이고 $|p| < |a|$이다. $|a|$가 최소인 해를 고르면 앞에서와 같은 모순이 생기므로, 0이 아닌 해는 존재하지 않는다.

소문항 (iv)

여기서는 4를 법(modulo)으로 하여 생각한다. 짝수 $2m$의 제곱은 $4m^2 \equiv 0$이고, 홀수 $2m + 1$의 제곱은 $4m^2 + 4m + 1 \equiv 1 \pmod 4$이다. 따라서 세 제곱수의 합을 4로 나눈 나머지는 세 수 가운데 홀수의 개수(0, 1, 2 또는 3)와 같다. 이 합이 4의 배수가 되는 것은 세 수가 모두 짝수일 때뿐이다.

생각해 보기 $a^2+b^2+c^2=4abc$에서 모든 것을 절반으로 줄이면 같은 방정식이 다시 나오는가?

그렇지 않다. $a=2p$, $b=2q$, $c=2r$이면 방정식은 $4(p^2+q^2+r^2)=32pqr$, 즉 $p^2+q^2+r^2=8pqr$이 된다. 계수가 두 배가 되었다. 그래서 절반으로 줄여도 **유지되는** 더 강한 명제를 증명한다.

주장. 어떤 정수 $k\geq 2$에 대해서도 $a^2+b^2+c^2=2^kabc$를 만족하는 0이 아닌 정수는 존재하지 않는다.

그런 정수가 존재한다고 가정하자. ($k\geq 2$인 모든 k에 대한) 그러한 해 전체 가운데 $|a|$가 가장 작은 것을 하나 고른다. $k\geq 2$이므로 우변 2^kabc는 4의 배수이다. 따라서 $a^2+b^2+c^2$은 4의 배수이고, 위의 관찰에 의해 a, b, c는 모두 짝수이다. 즉 $a=2p$, $b=2q$, $c=2r$이다. 그러면

$$4\left(p^2+q^2+r^2\right)=2^k\cdot 8pqr \quad\Longrightarrow\quad p^2+q^2+r^2=2^{k+1}\,pqr.$$

이것은 지수가 $k+1\geq 2$이고 $|p|<|a|$인 0이 아닌 정수해이므로, a의 선택에 모순이다. 따라서 주장이 성립한다. $k=2$인 경우로부터 $a^2+b^2+c^2=4abc$를 만족하는 0이 아닌 정수 a,b,c는 존재하지 않음을 알 수 있다.

검산

- $|a|,|b|,|c|\leq 40$인 0이 아닌 모든 a,b,c에 대하여 컴퓨터로 탐색한 결과, 네 방정식 가운데 어느 것의 해도, $2\leq k\leq 6$에 대한 $a^2+b^2+c^2=2^kabc$의 해도 찾지 못했다.
- 소문항 (iv)의 논증이 통하는 것은 계수에 들어 있는 2의 거듭제곱 덕분이다. 이런 꼴의 방정식 가운데 해가 **있는** 것도 있다. 예를 들어 $1^2+1^2+1^2=3\cdot 1\cdot 1\cdot 1$이고 $3^2+3^2+3^2=1\cdot 3\cdot 3\cdot 3$이다. 이 경우에는 계수가 홀수이므로 mod 4 논증이 파고들 여지가 없다.
- 아깝게 빗나가는 예에 강하법을 적용해 보자. $(a,b,c)=(1,1,1)$은 $a^2+b^2=3c^2$을 만족하지 않는데, $1+1=2$가 3의 배수가 아니기 때문이다. 이것이 바로 소문항 (iii)의 "$1+1=2$" 경우이다.

흔한 실수

- 강하법이 왜 모순을 낳는지 설명하지 않는 것. "더 작은 해를 얻는다"는 말은 최소인 해(또는 양의 정수는 한없이 작아질 수 없다는 사실)를 끌어들이기 전에는 증명이 아니다.

- 소문항 (iv)에서 절반으로 줄인 뒤 방정식이 바뀌지 않는다고 주장하는 것. 방정식은 바뀐다. 계수가 두 배가 되며, 바로 그 때문에 명제를 강화해야 한다.
- 이유 없이 "$3 \mid c^2$이므로 $3 \mid c$"라고 쓰는 것. 여기서 그 이유는 소문항 (iii)의 첫 번째 결과이다(더 일반적으로는 3이 소수이기 때문이다).

STEP 너머

페르마는 무한 강하법으로 $x^4 + y^4 = z^2$이 양의 정수해를 갖지 않음을 증명했고, 이로써 페르마의 마지막 정리(Last Theorem)의 $n = 4$인 경우를 해결했다. 여기서 각각의 강하법은 변수들이 모두 어떤 알맞은 소수로 나누어떨어지지는 않는 해가, 그 소수의 적당한 거듭제곱을 법으로 하여 존재하지 않음을 보이는 것과 같다. 이것은 p진수(p-adic numbers)와 현대 정수론의 국소–대역(local–global) 아이디어로 나아가는 첫걸음이다. 유명한 방정식 $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$(마르코프 방정식(Markov equation))는 아름다운 나무 구조로 생성되는 무한히 많은 해를 가진다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 강하법, 합동식, 제곱수의 합을 꼭 이 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.