풀이

STEP III 2022, 문제 12

확률과 통계 • 원의 임의의 현

STEP III 2022, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.3 절 "무작위"란 무슨 뜻인가?에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/bertrand.html

핵심 아이디어

이 문제의 모든 현(chord)은 하나의 사실에서 나온다. 반지름이 a인 원의 중심에서 수직 거리가 d인 현의 길이는 $2\sqrt{a^2-d^2}$이다. 따라서 할 일은 확률변수(random variable)들로 d를 나타낸 다음 평균을 구하는 것이다. 소문항 (ii)에서 치환 $u = a^2 - r^2\sin^2 t$가 자연스러운 까닭은 R의 확률밀도함수(probability density function)가 이 치환에 필요한 인수 r를 정확히 제공하기 때문이다.

풀이

소문항 (i)

각 AOB를 Θ라 하면, Θ는 $[0, 2\pi]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르고 밀도는 $\frac{1}{2\pi}$이다. 삼각형 AOB는 꼭지각이 Θ인 이등변삼각형이다. O에서 AB에 내린 수선은 꼭지각과 현을 모두 이등분하므로

$$AB = 2a\sin\tfrac{1}{2}\Theta.$$

이 식은 모든 $\Theta \in [0, 2\pi]$에서 성립한다. 이 범위에서 $\sin\frac{1}{2}\Theta \geq 0$이기 때문이다. $\Theta > \pi$일 때는 우각(reflex angle)을 재는 셈이지만 현은 같다. 따라서

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}(2+2) = \frac{4a}{\pi}.$$

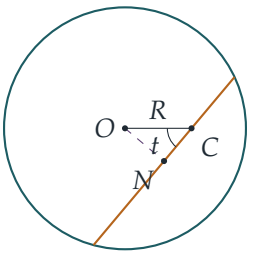
소문항 (ii)

R의 밀도. $0 \le r \le a$일 때, 사건 $R \le r$은 C가 O를 중심으로 하는 반지름 r인 원판 안에 있다는 뜻이다. 확률이 넓이에 비례하므로

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}, \qquad \text{따라서} \qquad f_R(r) = \frac{2r}{a^2} \quad (0 \le r \le a),$$

이고, 그 밖에서는 $f_R(r) = 0$이다.

현의 길이. O에서 현에 내린 수선의 발을 N이라 하자. 직각삼각형 ONC에서 빗변은 $OC = R$이고 C에서의 각은 t이므로 $ON = R\sin t$이다.



중심에서 내린 수선은 현을 이등분하고 N은 현의 중점이므로, O, N과 현의 한 끝점이 이루는 삼각형에 피타고라스(Pythagoras) 정리를 적용하면

$$\text{현의 길이} = 2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}.$$

$R < a$이므로 근호 안의 식은 양수이다. C의 양쪽에 걸친 현 전체를 센다는 점에 주의한다.

길이의 기댓값. t를 고정하고 C를 무작위로 택하면

$$\mathrm{L}(t) = \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2\sin^2 t}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r.$$

$\sin t \neq 0$이 되도록 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$라 하자. $u = a^2 - r^2\sin^2 t$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = -2r\sin^2 t\,\mathrm{d}r$이다. $r = 0$일 때 $u = a^2$이고, $r = a$일 때 $u = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t$이다. 그러면

$$\mathrm{L}(t) = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\int_{a^2\cos^2 t}^{a^2} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\cdot\frac{2}{3}\left(a^3 - a^3\cos^3 t\right) = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t},$$

이다. 여기서 $(a^2\cos^2 t)^{3/2} = a^3\cos^3 t$를 사용했는데, 예각에서는 $\cos t \ge 0$이므로 이는 타당하다. 이것이 구하는 공식이다.

? **생각해 보기** 분모 $\sin^2 t$를 어떻게 바꾸면 $1 - \cos^3 t$와 약분할 수 있을까?

$c = \cos t$라 하자. 그러면 $\sin^2 t = 1 - c^2 = (1-c)(1+c)$이고, $1 - c^3$은 세제곱의 차로서 $(1-c)(1+c+c^2)$이다. $c \neq 1$이므로 $1 - c$를 약분할 수 있다.

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\cdot\frac{1+c+c^2}{1+c} = \frac{4a}{3}\left(c + \frac{1}{1+c}\right),$$

여기서 $c(1+c)+1 = 1+c+c^2$을 썼다. 마지막으로 $1+\cos t = 2\cos^2\frac{1}{2}t$이므로 $\dfrac{1}{1+\cos t} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$이고,

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\left(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right),$$

이 되어 증명이 끝난다. 이 꼴은 $t=0$에서도 문제가 없다. 이때 값은 $\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{2} = 2a$이며, C를 지나 OC를 따라가는 현은 지름이므로 이는 옳다.

소문항 (iii)

T는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 밀도 $\frac{2}{\pi}$를 가지므로, L의 두 번째 꼴을 사용하면($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$이므로 적분하기 쉽다)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{L}(T)\big) &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4a}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}t\right)\mathrm{d}t = \frac{8a}{3\pi}\left[\sin t + \tan\tfrac{1}{2}t\right]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}.\end{aligned}$$

검산

- $t = \frac{1}{2}\pi$일 때 현은 OC에 수직이고 $\mathrm{L} = \frac{4a}{3}(0+\frac{1}{2}\cdot 2) = \frac{4a}{3}$이다. 직접 계산해도 $\int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4a}{3}$이다.
- t가 0에서 $\frac{1}{2}\pi$까지 변할 때 $\mathrm{L}(t)$는 $2a$에서 $\frac{4}{3}a$로 줄어들어야 하며, (iii)의 답 $\frac{16}{3\pi}a \approx 1.698a$는 평균이라면 마땅히 그래야 하듯 이 두 값 사이에 있다.
- $a = 1.7$, $t = 0.7$일 때 현의 길이를 R의 밀도에 대해 수치적분하면 3.01799가 나오며, 이는 $\mathrm{L}(0.7)$에 대한 두 공식의 값과 일치한다. (i)의 답 $\frac{4}{\pi}a \approx 1.273a$ 역시 수치적분으로 확인하였다.

흔한 실수

- R이 $[0,a]$에서 균등분포를 따른다고 보는 것. 점은 **넓이**에 대해 균등하게 분포하며, 중심에서 멀수록 넓이가 더 많으므로 밀도가 $2r/a^2$이 된다.
- C의 한쪽에 있는 현의 일부만 사용하거나, $ON = R\cos t$로 쓰는 것(이것은 현을 따라 잰 거리 CN이다).
- 소문항 (iii)에서 $\mathrm{L}(t)$의 두 번째 꼴 대신 첫 번째 꼴을 적분하는 것. 문제는 두 번째 꼴을 한 줄에 적분할 수 있도록 설계되어 있다.

STEP 너머

이것은 기하확률(geometric probability)로, 여기서 "무작위로 택한다"는 말은 분포가 정해진 뒤에야 의미를 갖는다. 답 $\frac{4a}{\pi}$와 $\frac{16a}{3\pi}$가 다른 것은 두 답이 현을 고르는 서로 다른 방법을 나타내기 때문이며, 이것이 바로 베르트랑의 역설(Bertrand's paradox)의 요점이다. 적분기하학(integral geometry)은 회전과 평행이동에 대해 변하지 않는 직선 위의 측도를 사용하여 이를 체계화한다. 영역 위의 연속분포와 여기서 계산한 것과 같은 기댓값에 대해서는 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.