풀이

STEP III 2022, 문제 10

역학 • 탄성 용수철의 평형

STEP III 2022, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

P에서의 각이 직각이므로 두 용수철의 힘은 서로 수직이다. 따라서 각 용수철 방향으로 힘을 분해하면 연립방정식 없이 각각의 장력을 따로 얻을 수 있다. 에너지에서는 탄성 에너지 항들이 중력 퍼텐셜 에너지 항과 아주 깔끔하게 결합하여 p가 θ의 간단한 함수가 된다. 그러면 소문항 (ii)의 진짜 핵심은 θ에 대한 **물리적** 제약, 즉 두 용수철이 모두 늘어나 있어야 한다는 조건이다.

풀이

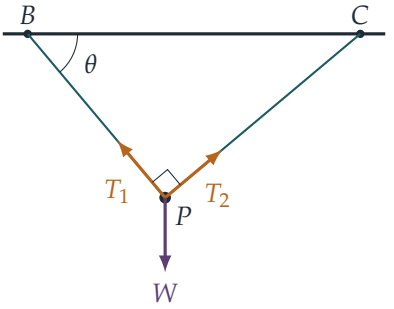
P를 질점(particle)으로, 용수철을 질량이 없고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 모형화한다. 그러면 탄성 계수(modulus)가 λ이고 자연 길이(natural length)가 a인 용수철을 길이 l까지 늘이면 장력(tension)은 $\lambda(l-a)/a$이고 저장된 에너지는 $\lambda(l-a)^2/(2a)$이다.

소문항 (i)

$BC = 2a$이고 각 $BPC = 90°$이므로 삼각형 BPC의 빗변(hypotenuse)은 BC이다. 따라서

$$PB = 2a\cos\theta, \qquad PC = 2a\sin\theta, \qquad \angle PCB = 90° - \theta.$$

PB와 PC의 장력을 각각 T_1, T_2라 하자.



직선 PB는 수평선과 각 θ를 이루므로 연직선과는 각 $90^\circ - \theta$를 이룬다. 마찬가지로 PC는 연직선과 각 θ를 이룬다. $PB \perp PC$이므로 PB 방향으로 분해하면 T_1과 무게만 관여하며, 무게의 BP 방향(B에서 멀어지는 방향) 성분은 $W\cos(90^\circ - \theta) = W\sin\theta$이다. 따라서

$$T_1 = W\sin\theta, \qquad \text{이고, 마찬가지로 분해 방향} PC, \qquad T_2 = W\cos\theta.$$

훅의 법칙에 의해

$$T_1 = \frac{s_1 W(2a\cos\theta - a)}{a} = s_1 W(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = s_2 W(2\sin\theta - 1).$$

두 식을 같게 놓으면

$$s_1 = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}, \qquad s_2 = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta - 1},$$

이고, 이것이 구하는 s_1이며 s_2도 함께 얻었다.

소문항 (ii)

중력 퍼텐셜 에너지. P는 BC보다 삼각형의 P에서 내린 높이만큼 아래에 있으며, 그 높이는 $PB\sin\theta = 2a\sin\theta\cos\theta = a\sin 2\theta$이다. BC를 기준 높이로 잡으면 중력 퍼텐셜 에너지(gravitational potential energy)는 $-Wa\sin 2\theta$이다.

탄성 에너지. PB의 늘어난 길이는 $a(2\cos\theta - 1)$이므로 소문항 (i)을 이용하면

$$\frac{s_1 W\, a^2(2\cos\theta - 1)^2}{2a} = \tfrac{1}{2}Wa\, s_1(2\cos\theta - 1)^2 = \tfrac{1}{2}Wa\sin\theta\,(2\cos\theta - 1),$$

이고, 마찬가지로 PC의 에너지는 $\frac{1}{2}Wa\cos\theta\,(2\sin\theta - 1)$이다.

합. 모두 더하면

$$\begin{aligned} -paW &= -Wa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}Wa(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta) \\ &= -Wa\sin 2\theta + Wa\sin 2\theta - \tfrac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

이므로

$$p = \tfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta + \tfrac{\pi}{4}).$$

생각해 보기 θ는 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이의 아무 값이나 될 수 있을까?

그렇지 않다. 탄성 계수 s_1W와 s_2W는 양수이고 장력 $W\sin\theta$와 $W\cos\theta$도 양수이므로, 두 용수철은 모두 **늘어나** 있어야 한다. 즉 $2\cos\theta - 1 > 0$이고 $2\sin\theta - 1 > 0$이다. (어느 한쪽이 0이라면 그 용수철은 힘을 전혀 내지 못하는데도 0이 아닌 장력을 제공해야 한다.) 따라서 $\cos\theta > \frac{1}{2}$이고 $\sin\theta > \frac{1}{2}$, 즉

$$\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{3}, \qquad \text{따라서} \qquad \tfrac{5\pi}{12} < \theta + \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{7\pi}{12}.$$

$\frac{\pi}{2}$에 대해 대칭인 이 구간에서 $\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$는 최대 1이고($\theta = \frac{\pi}{4}$에서 달성된다), 양 끝점에서의 값 $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12}$보다 엄격하게 크다. 이제

$$\sin\tfrac{5\pi}{12} = \sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4},$$

이므로

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \geq p > \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

유효숫자 한 자리. $0.65 \leq p < 0.75$임을 보여야 하며, 근호(surd)의 어림값은 제곱을 이용해 정당화한다. $1.6^2 = 2.56 < 3$이므로 $\sqrt{3} > 1.6$이고, 따라서 $p > \frac{1}{4}(2.6) = 0.65$이다. $1.5^2 = 2.25 > 2$이므로 $\sqrt{2} < 1.5$이고, 따라서 $p \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0.75$이다. 그러므로 유효숫자(significant figure) 한 자리로 $p = 0.7$이다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{4}$이면 배치가 대칭이고, 실제로 $s_1 = s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$이며 $p = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7071$이다.
- $\theta \to \frac{\pi}{6}^+$일 때 $s_1 \to \infty$이다. 용수철 PB가 자연 길이에 있으므로 장력을 지탱하려면 무한히 뻣뻣해야 한다. 이때 $p \to \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \approx 0.6830$으로 하한이 된다.
- $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$에서 무작위로 고른 많은 θ에 대해, 구한 위치가 전체 퍼텐셜 에너지의 정지점(stationary point)이고(따라서 실제로 평형(equilibrium)이고) 에너지가 $-\frac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta)$와 같음을 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- 중력 퍼텐셜 에너지에 양의 부호를 붙이는 것. P는 기준 높이보다 **아래**에 있다.
- $\frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$를 $(0, \frac{\pi}{2})$ 전체에서 최적화하여 잘못된 하한 $\frac{1}{2}$를 얻는 것. 용수철은 장력을 받고 있어야 한다.

▶ 오차가 반올림 결과를 바꿀 수 없음을 보이지 않고 $\sqrt{3} \approx 1.732$를 그대로 인용하는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)에서 항들이 소거된 것은 우연이 아니다. 평형 상태에서는 전체 퍼텐셜 에너지가 정상(stationary)이고, 훅의 법칙을 따르는 용수철의 탄성 에너지는 정확히 (장력 $\times$ 늘어난 길이)의 절반이므로, 이것이 중력에 대해 한 일과 연결된다. 평형을 퍼텐셜 에너지의 정지점으로 연구하고 그 안정성을 이계도함수로 살펴보는 것은 대학 1학년 역학의 중심 주제이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 에너지 관점을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.