풀이

STEP III 2022, 문제 1

순수수학 • 다항식의 근

> **STEP III 2022, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP III 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

매개변수 표시(parametrisation)를 원의 방정식에 대입하면 "두 곡선은 어디에서 만나는가?"라는 질문이 "사차방정식(quartic)의 근은 무엇인가?"라는 질문으로 바뀌고, 그 뒤로는 사차방정식을 한 번도 풀지 않고 근과 계수의 관계(relationships between roots and coefficients)만으로 모든 것을 해결한다. 여기에 쓸모 있는 요령이 하나 더 있는데, 역수(reciprocal) $1/t_i$는 계수를 거꾸로 배열한 같은 사차방정식의 근이라는 점이다. 마지막 소문항에서 "접한다(touching)"는 것은 중근(repeated root)을 뜻한다.

풀이

소문항 (i)

매개변수가 t인 점이 C_2 위에 있을 필요충분조건은

$$(ct - a)^2 + \left(\frac{c}{t} - b\right)^2 = r^2.$$

이다. 전개하면 $c^2t^2 - 2act + a^2 + \dfrac{c^2}{t^2} - \dfrac{2bc}{t} + b^2 = r^2$이다. $t \neq 0$이므로 해가 늘거나 줄지 않게 양변에 t^2을 곱할 수 있다.

$$c^2t^4 - 2act^3 + (a^2 + b^2 - r^2)t^2 - 2bct + c^2 = 0.$$

따라서 각 t_i는 $(*)$의 근이다. 서로 다른 t 값은 서로 다른 점을 준다(x좌표 ct가 다르기 때문이다). 그러므로 네 점 P_i는 서로 다른 네 매개변수를 준다. 사차방정식의 근은 많아야 네 개이므로 $t_1, \ldots, t_4$는 정확히 $(*)$의 근이다.

소문항 (ii)

$(*)$를 c^2으로 나누면, 근을 하나씩 더한 합과 두 개씩 곱해 더한 합은

$$\sum t_i = \frac{2a}{c}, \qquad \sum_{i<j} t_i t_j = \frac{a^2+b^2-r^2}{c^2}.$$

이다. $(\sum t_i)^2 = \sum t_i^2 + 2\sum_{i<j} t_i t_j$를 이용하면

$$\sum_{i=1}^{4} t_i^2 = \frac{4a^2}{c^2} - \frac{2(a^2+b^2-r^2)}{c^2} = \frac{2}{c^2}(a^2-b^2+r^2),$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

? **생각해 보기** 복잡하게 통분하지 않고 $\sum 1/t_i^2$을 구하려면 어떻게 해야 할까?

$(*)$에 $u = 1/t$를 넣는다. 상수항이 $c^2 \neq 0$이므로 0인 근은 없고, 따라서 $(*)$를 t^4으로 나눌 수 있다.

$$c^2 - 2acu + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2bcu^3 + c^2u^4 = 0,$$

즉 $c^2u^4 - 2bcu^3 + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2acu + c^2 = 0$이다. 이 방정식의 근은 $1/t_i$들이다. 이것은 $(*)$에서 a와 b를 맞바꾼 것이므로 같은 계산으로

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{t_i^2} = \frac{2}{c^2}(b^2-a^2+r^2).$$

을 얻는다.

소문항 (iii)

점 P_i는 $(ct_i,\, c/t_i)$이므로 $OP_i^2 = c^2t_i^2 + \dfrac{c^2}{t_i^2}$이다. 이를 모두 더하고 소문항 (ii)를 이용하면

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} OP_i^2 &= c^2\sum t_i^2 + c^2\sum \frac{1}{t_i^2} \\ &= 2(a^2-b^2+r^2) + 2(b^2-a^2+r^2) \\ &= 4r^2,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 중심 (a, b)가 완전히 사라졌다는 점에 주목하자.

소문항 (iv)

생각해 보기 "접한다"는 것은 $(*)$의 근으로 말하면 무슨 뜻일까?

$f(t) = (ct-a)^2 + (c/t-b)^2 - r^2$이라 하자. 이것은 움직이는 점에서 중심까지 거리의 제곱에서 r^2을 뺀 값이다. 곡선이 매개변수 t_0에서 원에 접한다는 것은 $f(t_0) = 0$이고 $f'(t_0) = 0$이라는 뜻이다. 즉 그 점이 원 위에 있고, 일차 근사로 보면 중심까지의 거리가 변하지 않으므로, 그 점에서 곡선의 방향은 반지름에 수직(perpendicular)이며 이는 곧 원의 접선 방향이다. (여기서는 속도 벡터 $(c, -c/t^2)$가 결코 영벡터가 아니라는 사실을 이용한다.) $(*)$의 사차식은 $t^2 f(t)$이고 $t_0 \neq 0$이므로, f가 t_0에서 중근을 가질 필요충분조건은 $(*)$가 t_0에서 중근을 갖는 것이다.

따라서 C_1과 C_2가 매개변수가 $\alpha \neq \beta$인 서로 다른 두 점에서 접한다면, α와 β는 모두 $(*)$의 중근이다. 이것으로 네 근이 모두 정해지므로

$$c^2t^4 - 2act^3 + (a^2+b^2-r^2)t^2 - 2bct + c^2 = c^2(t-\alpha)^2(t-\beta)^2.$$

이다. **근의 곱.** 상수항을 비교하면 $c^2\alpha^2\beta^2 = c^2$이므로 $(\alpha\beta)^2 = 1$이고 $\alpha\beta = \pm 1$이다.

근의 합. t^3의 계수를 비교하면 $2(\alpha+\beta) = \dfrac{2a}{c}$이므로 $\alpha+\beta = \dfrac{a}{c}$이다.

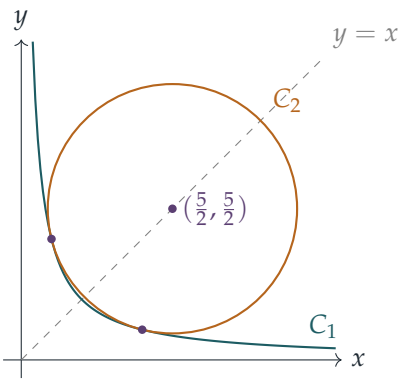
세 근씩 곱한 것의 합. t의 계수를 비교하면 $2\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{2b}{c}$이므로 $\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{b}{c}$이다.

마지막 두 식을 나누면(또는 두 번째 식을 세 번째 식에 대입하면) $b = \alpha\beta\, a$를 얻는다. 따라서

$$\alpha\beta = 1 \implies b = a, \qquad \alpha\beta = -1 \implies b = -a,$$

이므로 중심 (a, b)는 $y = x$ 위에 있거나 $y = -x$ 위에 있다. ($a = 0$이면 $b = 0$이기도 하므로 중심은 원점이고, 원점은 두 직선 위에 모두 있다.)

그림은 $c = 1, \alpha = 2, \beta = \frac{1}{2}$인 경우이다. 계수를 맞추면 $a = b = \frac{5}{2}, r^2 = \frac{17}{4}$이고, 원은 쌍곡선(hyperbola)에 $(2, \frac{1}{2})$과 $(\frac{1}{2}, 2)$에서 접한다.



검산

- 소문항 (iii)에서 $c = 1, r^2 > 2$로 두고 원점이 중심인 원 $x^2 + y^2 = r^2$을 생각하자. 대칭성에 의해 네 점은 $(p, q), (q, p), (-p, -q), (-q, -p)$이고 각각 원점에서 거리가 r이므로, 합은 실제로 $4r^2$이다.
- 그림의 예에서 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$와 $(2, \frac{1}{2})$ 사이 거리의 제곱은 $\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} = 4.25$로, 마땅히 그래야 하는 값이다. 그 점에서 반지름 방향 $(-\frac{1}{2}, -2)$는 곡선의 방향 $(1, -\frac{1}{4})$에 수직이므로 접한다는 것이 확인된다.
- 소문항 (ii)의 공식은 무작위로 고른 수천 개의 원에 대해 사차방정식을 수치적으로 풀어 컴퓨터로 확인하였다.

흔한 실수

- $\sum t_i t_j$의 부호를 틀리는 것. $t^4 + pt^3 + qt^2 + \ldots$에서 근의 합은 $-p$이지만 두 근씩 곱한 것의 합은 $+q$이다.
- 소문항 (iv)에서 근의 곱만 이용하는 것. 그러면 $\alpha\beta = \pm 1$을 얻지만, 이것만으로는 (a, b)에 대해 아무것도 알 수 없다. a와 b를 끌어들이려면 계수를 한 번 더 비교해야 한다.
- "접한다"는 것이 왜 중근을 주는지 설명하지 않는 것. 그 이유는 $t_0 \neq 0$과 함께 조건 $f(t_0) = f'(t_0) = 0$이 성립하기 때문이다.

STEP 너머

근과 계수 사이의 관계는 기본 대칭함수(elementary symmetric functions)이다. 고전적인 정리에 따르면 $\sum t_i^2$이나 $\sum t_i^{-2}$처럼 근에 대한 **모든** 대칭다항식(symmetric polynomial)은 계수로 나타낼 수 있다. 역수를 취하는 요령 $u = 1/t$는 사영기하(projective geometry)의 생각을 처음 엿보게 해 주며, 원뿔곡선(conic)과 원이 많아야 네 점에서 만난다는 사실은 평면곡선의 교점에 관한 베주(Bézout)의 정리의 특수한 경우이다. 다항식과 그 근에 대해 더 알고 싶다면 Allenby, *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를, 이런 유형의 문제를 연습하고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.