풀이

STEP II 2022, 문제 9

역학 • 마찰과 모멘트

STEP II 2022, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

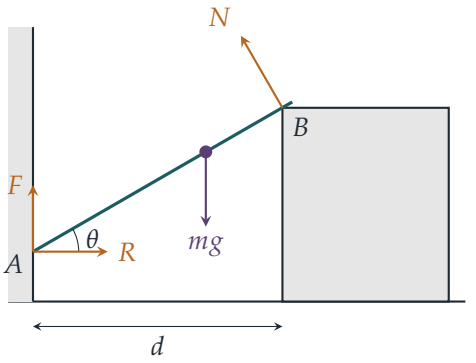
판자는 가벼우므로 판자에 힘을 가하는 것은 세 가지뿐이다. 질점, 각기둥(prism) 모서리에서의 반작용, 그리고 벽이다. 판자가 벽에 닿는 점에 대한 모멘트(moment)를 잡으면 벽에서 오는 두 힘이 한꺼번에 사라지고, 모서리에서의 반작용이 곧바로 구해진다. 이어서 연직 방향으로 힘을 분해하면 마찰력(friction)이 구해지고, 이후의 모든 소문항은 마찰 부등식 $|F| \leq \mu R$를 정리한 것에 지나지 않는다.

풀이

모형. 판자는 가벼운 강체 막대(light rigid rod)이고, 질량은 무게가 mg인 질점(particle)이며, 각기둥의 모서리는 매끄럽고, 벽은 마찰계수(coefficient of friction)가 μ인 거친 면이다. 판자가 벽에 닿는 점을 A, 판자가 모서리 위에 얹힌 점을 B라 하자. B는 벽으로부터 수평 거리 d만큼 떨어져 있으므로

$$AB = d\sec\theta.$$

B에서 판자는 모서리 위에 얹혀 있으므로, 매끄러운 반작용 N은 **판자**에 수직이다. A에서 벽은 수평 방향의 수직항력(normal reaction) R와 연직 방향의 마찰력 F를 주는데, F는 위쪽을 양의 방향으로 잡는다(F가 음수이면 아래쪽으로 작용한다는 뜻이다).



A에 대한 모멘트. 벽에서 오는 두 힘은 모두 A를 지난다. 무게는 판자를 따라 거리 x인 곳에 작용하므로 그 팔의 길이는 $x\cos\theta$이다. N은 거리 $d\sec\theta$인 곳에서 판자에 수직으로 작용한다.

$$N\,d\sec\theta = mg\,x\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{mg\,x\cos^2\theta}{d}.$$

힘의 분해. N의 방향은 연직 방향과 각 θ를 이루며 벽 쪽으로 기울어져 있다. 수평 방향과 연직 방향으로 분해하면

$$R = N\sin\theta = \frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d},$$
$$F = mg - N\cos\theta = mg\left(1 - \frac{x\cos^3\theta}{d}\right).$$

$R > 0$이므로 판자가 실제로 벽을 누르고 있음에 주목하자.

소문항 (i)

$x = d\sec^3\theta$이면 $x\cos^3\theta/d = 1$이므로 $F = 0$이다. 즉 벽에서 마찰력이 작용하지 않는다.

소문항 (ii)

마찰이 있을 때 평형(equilibrium)이 유지되려면 $|F| \le \mu R$이어야 한다.

$x > d\sec^3\theta$이면 $x\cos^3\theta/d > 1$이므로 $F < 0$이다(마찰력이 아래쪽으로 작용한다. 마찰이 없다면 끝점 A가 벽을 따라 위로 미끄러져 올라갈 것이다). 조건 $-F \le \mu R$는 다음과 같다.

$$mg\left(\frac{x\cos^3\theta}{d} - 1\right) \le \mu\,\frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d}.$$

양수 $d\sec^3\theta/(mg)$를 곱하면

$$x - d\sec^3\theta \le \mu\,x\tan\theta, \qquad \text{따라서} \qquad \mu \ge \frac{x - d\sec^3\theta}{x\tan\theta},$$

이다. 여기서 θ가 예각이므로 $x\tan\theta > 0$으로 나누었다. 이것이 구하려는 결과이다.

$x < d\sec^3\theta$이면 $F > 0$이고, 조건 $F \le \mu R$는 같은 방법으로

$$\mu \ge \frac{d\sec^3\theta - x}{x\tan\theta}.$$

가 된다.

> **생각해 보기** 마찰력은 어느 쪽으로 작용하며, 짐작하지 않고 그것을 어떻게 알 수 있는가?

짐작할 필요가 없다. F를 위쪽이 양이 되도록 잡으면 연직 방향의 식이 그 부호를 알려 준다. 마찰은 언제나 $|F| \le \mu R$로 쓸 수 있으며, F의 부호는 두 부등식 가운데 어느 것을 얻는지를 정해 줄 뿐이다.

소문항 (iii)

(ii)의 두 경우는 모두 $|x - d\sec^3\theta| \le \mu x\tan\theta$라는 뜻이며, 이는 다음 두 부등식을 함께 만족하는 것과 같다.

$$x - d\sec^3\theta \le \mu x\tan\theta \qquad \text{그리고} \qquad d\sec^3\theta - x \le \mu x\tan\theta.$$

두 번째 부등식에서 $d\sec^3\theta \le x(1+\mu\tan\theta)$를 얻는다. $1+\mu\tan\theta > 0$이므로

$$\frac{x}{d} \ge \frac{\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta}.$$

첫 번째 부등식에서 $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$를 얻는다. $\mu < \cot\theta$이면 $\mu\tan\theta < 1$이므로 $1-\mu\tan\theta > 0$이고, 부등호 방향을 바꾸지 않고 나눌 수 있다.

$$\frac{x}{d} \le \frac{\sec^3\theta}{1-\mu\tan\theta}.$$

($\mu \ge \cot\theta$이면 상한이 없다. 질량이 판자 위 어디에 있든 마찰력이 그것을 붙잡아 둘 수 있다.)

소문항 (iv)

질량이 벽과 모서리 사이에 놓이는 것은 정확히 $x < AB = d\sec\theta$일 때이다. 이것을 (iii)의 하한과 합치면

$$\frac{d\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta} \le x < d\sec\theta.$$

$d\sec\theta > 0$으로 나누고 $1+\mu\tan\theta > 0$을 곱하면

$$\sec^2\theta < 1+\mu\tan\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\theta < \mu\tan\theta,$$

이다. 여기서 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$를 사용하였다. $\tan\theta > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있고, 따라서 요구한 대로 $\tan\theta < \mu$를 얻는다.

검산

- $\theta = 45°$, $d = 1$, $\mu = 0.5$로 잡자. 그러면 $\sec^3\theta = 2\sqrt{2} \approx 2.83$이고, (iii)에 따라 $1.89 \leq x \leq 5.66$이 허용된다. 예를 들어 $x = 2$에서 $F = mg(1 - 2/2\sqrt{2}) \approx 0.29mg$이고 $N = mg$, $R = mg/\sqrt{2}$, $\mu R \approx 0.35mg$이므로 평형이 유지된다. 이때 질량은 모서리 너머에 있는데($AB = \sqrt{2}$), 이는 $\tan 45° = 1 > \mu$이므로 (iv)와 들어맞는다.
- 극한의 경우 $\mu = 0$(매끄러운 벽): (iii)의 범위가 $x = d\sec^3\theta$로 좁혀지며, 이는 (i)에서 구한 유일한 위치이다.
- θ, d, μ, x의 무작위 값을 많이 넣어 컴퓨터로 확인한 결과, 힘이 평형을 이루며(다른 점에 대한 모멘트도 포함하여), $|F| \leq \mu R$가 성립하는 것은 정확히 (iii)의 부등식이 성립할 때임이 확인되었다.

흔한 실수

- 모서리에서의 반작용을 연직 방향으로 잡는 것. 판자는 모서리 위에 얹혀 있으므로, 매끄러운 반작용은 각기둥의 윗면이 아니라 판자에 수직이다.
- 모멘트 식에서 거리 AB로 $d\sec\theta$ 대신 d를 쓰는 것.
- $1 - \mu\tan\theta$의 부호를 확인하지 않고 $x(1 - \mu\tan\theta) \leq d\sec^3\theta$를 나누는 것. 조건 $\mu < \cot\theta$가 등장하는 이유가 바로 이것이다.

STEP 너머

이 판자는 **정정**(*statically determinate*) 구조이다. 미지의 반작용이 세 개이고 평형 방정식도 세 개이므로 마찰력이 정확히 결정된다. 지지점을 하나 더 추가하면 방정식만으로는 더 이상 힘이 정해지지 않으며, 이때 공학자들은 보의 탄성(elasticity)을 고려하여 하중이 어떻게 분담되는지를 정한다. (iii)의 범위는 "평형 영역(region of equilibrium)"의 작은 예이며, 이 주제는 안정성(stability)을 공부할 때 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.