풀이

STEP II 2022, 문제 8

순수수학 • 행렬의 불변 직선

> **STEP II 2022, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 OCR에서 내려받을 수 있는 2022년 STEP 시험지 묶음(zip 파일) 가운데 STEP II 시험지에 있다:
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

핵심 아이디어

원점을 지나는 직선 위의 모든 점이 같은 직선 위의 점으로 옮겨지면 그 직선을 불변 직선(invariant line)이라 한다. 따라서 방향 벡터(direction vector) 하나가 어디로 가는지만 보면 충분하다. 직선을 $y = mx$로 쓰고 $\mathbf{M}\binom{1}{m}$이 $\binom{1}{m}$의 실수배가 되도록 요구하면, 모든 것이 m에 대한 이차방정식(quadratic equation)으로 바뀐다. 그다음 소문항 (ii)와 (iii)은 이 방정식의 두 근의 합과 곱에 관한 문제가 되며, 기울기(gradient)가 없는 수직선은 매번 따로 살펴보아야 한다.

풀이

소문항 (i)

방향이 $\binom{1}{m}$인 직선 $y = mx$를 생각하자. 이 방향 벡터의 상은

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+bm\\c+dm\end{pmatrix}.$$

이다. $\mathbf{M}$이 선형(linear)이므로, 이 직선이 불변일 필요충분조건은 이 상이 $y = mx$ 위에 놓이는 것, 즉

$$c + dm = m(a + bm) \quad \Longleftrightarrow \quad bm^2 + (a-d)m - c = 0.$$

이다. 따라서 수직이 아닌 모든 불변 직선의 기울기는 이 방정식을 만족하고, 이 방정식의 모든 근은 불변 직선 하나를 준다.

기울기들을 "두 근"이라고 부르기 전에, 이 방정식이 정말로 이차방정식인지 확인해야 한다. y축의 방향은 $\binom{0}{1}$이고 그 상은 $\binom{b}{d}$이다. 이것이 y축 위에 놓일 필요충분조건은 $b = 0$이

다. 따라서 두 불변 직선 중 어느 것도 y축이 아니라면 $b \neq 0$이다. 그러면 이 방정식은 진짜 이차방정식이고, 근은 많아야 두 개이다. 두 불변 직선은 모두 수직이 아니고 기울기가 서로 다르므로, 그 기울기는 서로 다른 두 근이다. 즉 두 기울기는 정확히 이 방정식의 두 근이며, 이것이 보이려던 것이다.

불변 직선 하나가 y축이라면 $b = 0$이고, 방정식은 $(a-d)m - c = 0$으로 줄어든다. $a \neq d$이므로(이 조건은 바로 여기서 쓰인다), 나머지 불변 직선의 기울기는

$$m = \frac{c}{a-d}.$$

이다.

소문항 (ii)

$b \neq 0$**인 경우.** 두 기울기를 m_1, m_2라 하자. 소문항 (i)에서

$$m_1 + m_2 = -\frac{a-d}{b}, \qquad m_1 m_2 = -\frac{c}{b}.$$

이다. 두 직선이 x축과 이루는 각을 α_1, α_2라 하면

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

이다. 두 직선 사이의 각이 45°라는 것은 이 값이 ± 1이라는 뜻이므로 $(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$이다. 좌변을 $(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2$로 쓰면

$$\frac{(a-d)^2}{b^2} + \frac{4c}{b} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2.$$

을 얻는다. 양변에 b^2을 곱하면 $(a-d)^2 + 4bc = (b-c)^2$, 즉

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 - 4bc.$$

이다.

$b = 0$**인 경우.** 한 직선은 y축이고 다른 직선의 기울기는 $c/(a-d)$이다. 이 직선이 y축과 45°를 이루려면 기울기가 ± 1이어야 하므로 $c = \pm(a-d)$이고 $(a-d)^2 = c^2$이다. $b = 0$이면 보이려는 식의 우변도 c^2이므로, 이 경우에도 결과가 성립한다.

소문항 (iii)

생각해 보기 "$y = x$와 같은 각을 이룬다"는 것을 기울기로 나타내면 무슨 뜻인가?

원점을 지나는 서로 다른 두 직선이 $y = x$와 같은 각을 이룰 필요충분조건은 한 직선이 다른 직선을 $y = x$에 대해 반사한 거울상(mirror image)인 것이다. $y = x$에 대한 반사는 두

좌표를 맞바꾸므로, $y = mx$를 $x = my$로 보내고, 이는 $m \neq 0$일 때 $y = \frac{1}{m}x$이다. 또 이 반사는 x축을 y축으로, y축을 x축으로 보낸다.

$b \neq 0$인 경우. 두 직선 모두 수직이 아니다. 한 직선의 기울기가 0이라면 그 거울상은 y축인데, y축은 불변이 아니므로 두 직선은 대칭이 될 수 없다. 그렇지 않은 경우 조건은 $m_2 = 1/m_1$, 즉 $m_1 m_2 = 1$이다. 소문항 (i)에 의해 이는 $-c/b = 1$, 즉 $b + c = 0$이다.

$b = 0$인 경우. 한 직선이 y축이므로 다른 직선은 x축이어야 한다. 즉 $c/(a-d) = 0$, 곧 $c = 0$이다. $b = 0$이므로 이것 역시 $b + c = 0$이라는 조건이다.

따라서 모든 경우에 필요충분조건은

$$b + c = 0, \quad \text{즉,} \quad c = -b.$$

이다. (행렬이 대칭행렬(symmetric matrix)이어서 $b = c$이면, 대신 두 불변 직선이 서로 수직이 된다. 여기서는 비대각 성분(off-diagonal entries)의 부호가 반대이다.)

소문항 (iv)

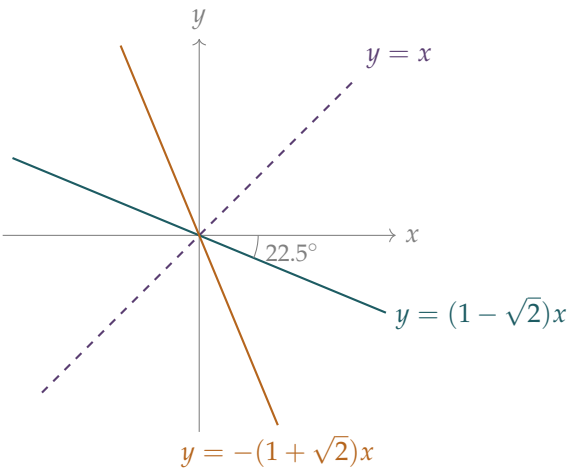
소문항 (ii)의 조건에 $c = -b$를 대입하면

$$(a-d)^2 = (2b)^2 + 4b^2 = 8b^2.$$

이다. $b \neq 0$이어야 한다. $b = c = 0$이면 $(a-d)^2 = 0$이 되어 $a \neq d$에 모순이기 때문이다. $b = 1, c = -1, a - d = 2\sqrt{2}$로 잡자. 예를 들어 $a = \sqrt{2}, d = -\sqrt{2}$로 두면

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

이다. 소문항 (i)의 이차방정식은 $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0$이고, 서로 다른 두 실근 $m = -\sqrt{2} \pm 1$을 가진다. 따라서 이 행렬은 문제에서 가정한 대로 정확히 두 개의 불변 직선을 가진다. 두 기울기의 곱이 1이므로 두 직선은 $y = x$에 대해 서로 거울상이다. $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$이고 $\tan 67.5^\circ = \sqrt{2} + 1$이므로, 두 직선이 x축과 이루는 각은 -22.5°와 -67.5°이다. 따라서 두 직선은 45°로 만나고, 각각 $y = x$와 67.5°를 이룬다.



검산

- 소문항 (iv)의 예에서 $(a-d)^2 = 8$이고 $(b-c)^2 - 4bc = 4+4 = 8$이므로 소문항 (ii)의 조건이 성립한다. 직선 하나를 직접 확인할 수도 있다. $\mathbf{M}\binom{1}{1-\sqrt{2}} = \binom{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{-1-\sqrt{2}+2} = \binom{1}{1-\sqrt{2}}$이므로, $y = (1-\sqrt{2})x$ 위의 모든 점은 사실 고정된다.
- 소문항 (i)에 대한 간단한 특수한 경우: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 불변 직선은 두 좌표축이다. y축인 경우의 공식은 다른 기울기를 $0/(2-1) = 0$으로 주며, 이는 옳다.
- 소문항 (i)–(iii)은 수천 개의 무작위 행렬에 대해 컴퓨터로 확인하였다. 고유벡터 방향은 이차방정식을 만족하고, 45°를 이루는 쌍은 항등식을 만족하며, 두 직선이 $y = x$에 대해 대칭일 필요충분조건은 $b + c = 0$이었다.

흔한 실수

- 수직선을 잊는 것. 이차방정식은 기울기만 다루므로, 모든 소문항에서 $b = 0$인 경우를 따로 처리해야 한다.
- 소문항 (iii)에서 $m_1 = -m_2$로 쓰는 것. 이는 **좌표축**에 대한 대칭이다. $y = x$에 대한 대칭에는 $m_1 m_2 = 1$이 필요하다.
- $\pm$ 없이 $\tan\theta = 1$을 쓰는 것. $(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$으로 제곱하면 두 부호를 한꺼번에 처리할 수 있다.

STEP 너머

원점을 지나는 불변 직선은 $\mathbf{M}$의 **고유벡터**(eigenvector) 방향이고, 소문항 (i)의 이차방정식은 고유벡터 방정식 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$에서 λ를 소거한 것이다. 실대칭행렬은 항상 서로 수직인 고유벡터를 가진다(스펙트럼 정리(spectral theorem)). 이 문제는 비대각 성분이 반대칭(antisymmetric)이면 대신 고유벡터들이 $y = x$에 대해 대칭이 된다는 것을 보여 준다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 고유벡터와 스펙트럼 정리를 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.